詳細解答

STEP II 2014，第 11 題

力學 • 圓周運動

> **STEP II 2014，第 11 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/14-s2-q11

關鍵思路

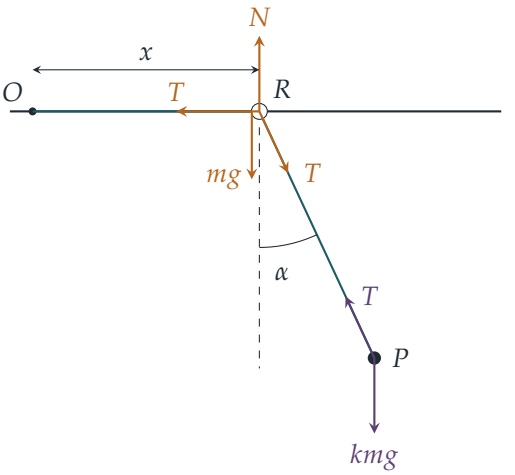
整個問題只由一個變量 x 主導。由於繩子不可伸長（inextensible），而 α 固定不變，P 的位置是 x 的一個簡單函數（function），因此 P 的兩個加速度分量都是 $\ddot{x}$ 的倍數。這樣便得到三條運動方程（equations of motion）（兩條關於 P，一條關於環的水平方向），但未知數只有兩個：$\ddot{x}$ 和 T。超定方程組（overdetermined system）只有在某個特殊條件成立時才相容，而正是這個相容條件（consistency condition）把 α 和 k 聯繫起來。

解答

模型。環和 P 均視為質點（particle），繩子輕而不可伸長，環和軌道均光滑（smooth）。由於環是光滑的，繩子兩段的張力（tension）T 相同。取 O 為原點，x 軸沿軌道、方向由 O 指向環，y 軸豎直向上。

P 的坐標。繩子由 O 到環的一段沿軌道，長度為 x，所以由環到 P 的一段長度為 $L - x$。這一段與向下的鉛垂線成角 α，而 P 懸在環遠離 O 的一側（我們會在第 (i) 部分末尾說明為何如此選取）。因此

$$P = (x + (L - x)\sin\alpha,\ -(L - x)\cos\alpha).$$



第 (i) 部分

在 α 為常數的情況下，把 P 的坐標對時間微分兩次，得

$$\ddot{x}_P = \ddot{x}\,(1-\sin\alpha), \qquad \ddot{y}_P = \ddot{x}\cos\alpha.$$

作用於 P 的力有向下的重量 kmg，以及沿繩子指向環的張力 T；張力的水平分量為 $-T\sin\alpha$，豎直分量為 $+T\cos\alpha$。

P，**豎直方向**：$km\,\ddot{y}_P = T\cos\alpha - kmg$，即

$$km\ddot{x}\cos\alpha = T\cos\alpha - kmg,$$

與所求相符。

P，**水平方向**：

$$km\ddot{x}\,(1-\sin\alpha) = -T\sin\alpha. \tag{1}$$

環，水平方向。環兩邊都受到繩子的作用：沿軌道的一段以力 T 把環拉向 O，而往下連到 P 的一段則以水平分量 $T\sin\alpha$ 把環拉離 O。環的重量和軌道的法向反作用力（normal reaction）都是豎直的（軌道光滑）。因此

$$m\ddot{x} = T\sin\alpha - T = -T(1-\sin\alpha). \tag{2}$$

想一想 為甚麼 P 必須在環遠離 O 的一側？

假如 P 懸在靠近 O 的一側，它的 x 坐標便是 $x-(L-x)\sin\alpha$，兩條水平方程會變成 $km\ddot{x}(1+\sin\alpha) = T\sin\alpha$ 和 $m\ddot{x} = -T(1+\sin\alpha)$。第一條使 $\ddot{x}\geq 0$，第二條使 $\ddot{x}\leq 0$，於是 $\ddot{x}=0$ 且 $T=0$；但這樣豎直方程便給出 $0=-kmg$，這是不可能的。所以那種位形不可能在 α 不變的情況下運動，上面的坐標才是正確的。

第 (ii) 部分

首先，$T \neq 0$：若 $T = 0$，則 (2) 給出 $\ddot{x} = 0$，而豎直方程給出 $0 = -kmg$，矛盾。

由 (2)，$m\ddot{x} = -T(1 - \sin\alpha)$。代入 (1)：

$$k(-T(1-\sin\alpha))(1-\sin\alpha) = -T\sin\alpha.$$

兩邊除以 $-T \neq 0$，

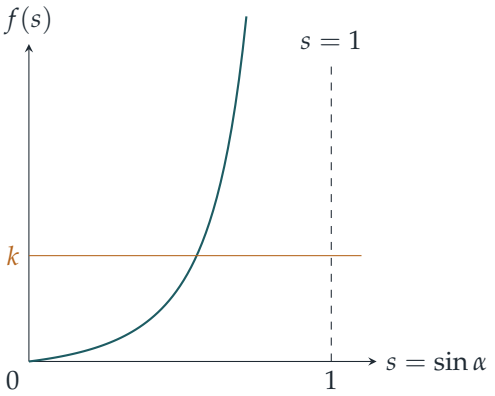
$$\frac{\sin\alpha}{(1-\sin\alpha)^2} = k,$$

與所求相符。（由於 α 是銳角（acute angle），$0 < \sin\alpha < 1$，所以除以 $(1-\sin\alpha)^2$ 是沒有問題的。）

每一個 k 都可以出現。設 $s = \sin\alpha$，並在 $0 < s < 1$ 上定義 $f(s) = \dfrac{s}{(1-s)^2}$，這恰好涵蓋所有 $\alpha \neq 0$ 的銳角 α。由商法則（quotient rule），

$$f'(s) = \frac{(1-s)^2 + 2s(1-s)}{(1-s)^4} = \frac{1+s}{(1-s)^3} > 0,$$

所以 f 嚴格遞增（strictly increasing）。此外，當 $s \to 0^+$ 時 $f(s) \to 0$，當 $s \to 1^-$ 時 $f(s) \to \infty$，而且 f 連續（continuous）。因此 f 恰好取每個正值一次，即對每個 $k > 0$，恰有一個銳角 α 滿足該條件。



無論水平線 $y = k$ 的高度是多少，它都恰好與曲線相交一次。

第 (iii) 部分

現在利用 (2) 和豎直方程消去 T。由 (2)，$T = -\dfrac{m\ddot{x}}{1-\sin\alpha}$。代入豎直方程並除以 m：

$$k\ddot{x}\cos\alpha = -\frac{\ddot{x}\cos\alpha}{1-\sin\alpha} - kg \quad\Longrightarrow\quad \ddot{x}\cos\alpha\left(k + \frac{1}{1-\sin\alpha}\right) = -kg.$$

再利用第 (ii) 部分替換括號內的 k：

$$k+\frac{1}{1-\sin\alpha}=\frac{\sin\alpha+(1-\sin\alpha)}{(1-\sin\alpha)^2}=\frac{1}{(1-\sin\alpha)^2}.$$

因此

$$\ddot{x}=-\frac{kg(1-\sin\alpha)^2}{\cos\alpha}=-\frac{g\sin\alpha}{\cos\alpha}=-g\tan\alpha,$$

這裏再一次用了 $k(1-\sin\alpha)^2=\sin\alpha$。這就是所求的結果。

額外一提，$T=-\dfrac{m\ddot{x}}{1-\sin\alpha}=\dfrac{mg\tan\alpha}{1-\sin\alpha}>0$，所以繩子確實是拉緊的，符合模型的要求。

驗算

- 取 $k=1$，條件 $s=(1-s)^2$ 給出 $\sin\alpha=\frac{1}{2}(3-\sqrt{5})\approx 0.382$，所以 $\alpha\approx 22.46°$，$\ddot{x}\approx -0.413g$。把這些代入 (1)、(2) 和豎直方程，三條都成立。
- 我們以數值方法模擬了完整的雙變量運動（以 x 和繩子的角度為變量），從這個角度開始並讓環在運動中：角度在 10^{-10} rad 的誤差內保持不變，而環的減速度恰好是 $g\tan\alpha$。若從稍為不同的角度開始，角度會立即開始改變，可見 α 這個特殊值確實關鍵。
- 極限情況：當 $k\to 0$（質點非常輕），$\alpha\to 0$ 且 $\ddot{x}\to 0$；當 $k\to\infty$，$\alpha\to 90°$，減速度無限增大，因為輕環正被一個重質點拖動。
- 正負號：$\ddot{x}<0$，所以環的加速度總是指向 O。這是合理的：環所受的水平合力 $-T(1-\sin\alpha)$ 指向 O。

常見錯誤

- 忘記環兩邊都受到繩子的作用；正是沿軌道指向 O 的拉力令 (2) 成立。
- 把 P 的水平加速度寫成 $\ddot{x}$；懸垂部分的長度 $L-x$ 也在改變，這會貢獻 $-\ddot{x}\sin\alpha$ 一項。
- 微分時把 α 當作變量。這裏它是常數，而這正是問題得以處理的原因。

STEP 之外

這是一個有兩個自由度（degrees of freedom）的系統（環的位置和繩子的角度），題目要找的是其中一個自由度保持不變的特殊解，頗有相對平衡（relative equilibrium）的意

味。在大學一年級的課程中，你會以 x 和角度寫出拉格朗日量（Lagrangian），並發現只有在這裏求得的那一個 α 值下，角度不變的運動才有可能；接下來自然要問的是，這種運動是否穩定（stable）。Kleppner 和 Kolenkow 的 *An Introduction to Mechanics*（《力學導論》）對這類約束系統（constrained systems）有很好的講解。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。