詳細解答

STEP II 2014，第 10 題

力學 • 軌道的包絡線

> **STEP II 2014，第 10 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/14-s2-q10

本題在 *Beyond STEP* 第 11.9 節安全拋物線中有完整的引導式講解：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/ch11/safety-parabola.html

關鍵思路

消去時間後，軌跡（trajectory）方程是一個關於 $\lambda = \tan\theta$ 的二次方程（*quadratic*），因為 $\sec^2\theta = 1 + \lambda^2$。固定一點 (x, y)，然後問：是否存在某個發射角，使軌跡經過這一點？這等同於問這個關於 λ 的二次方程是否有實根，所以判別式（discriminant）就給出可到達區域的邊界。至於最後一部分，邊界曲線原來是一條焦點（focus）在 O 的拋物線，這使得計算與 O 的距離變得非常容易。

解答

軌跡

把拋射體（projectile）視為在重力作用下自由運動的質點（particle），不計空氣阻力。經過時間 t 後，

$$x = ut\cos\theta, \qquad y = ut\sin\theta - \tfrac{1}{2}gt^2.$$

由於 $\cos\theta \neq 0$（該角小於直角），$t = x/(u\cos\theta)$，代入得

$$y = x\tan\theta - \frac{gx^2}{2u^2\cos^2\theta}.$$

利用 $\sec^2\theta = 1 + \tan^2\theta = 1 + \lambda^2$，得笛卡兒方程（Cartesian equation）

$$\boxed{y = \lambda x - \frac{gx^2}{2u^2}\left(1 + \lambda^2\right).}$$

給定 x 上方的最大高度 Y

固定 u，並固定 $x > 0$。此時 y 只是 λ 的函數，可以改寫為

$$\frac{gx^2}{2u^2}\lambda^2 - x\lambda + \left(\frac{gx^2}{2u^2} + y\right) = 0.$$

? **想一想** 為甚麼要把它看成關於 λ 的方程，而不是關於 y 的方程？

某個值 y 會在這個 x 的上方出現，當且僅當有某個發射角能產生它，即這個二次方程有實根 λ。因此其判別式必須非負：

$$x^2 - 4 \cdot \frac{gx^2}{2u^2}\left(\frac{gx^2}{2u^2} + y\right) \geq 0.$$

除以 $x^2 > 0$，再乘以 $u^2/(2g) > 0$，這不會改變不等式的方向，得

$$\frac{u^2}{2g} \geq \frac{gx^2}{2u^2} + y \iff y \leq \frac{u^2}{2g} - \frac{gx^2}{2u^2}.$$

所以

$$\boxed{Y = \frac{u^2}{2g} - \frac{gx^2}{2u^2}}$$

而且沒有任何軌跡在這個 x 的上方高於 Y。

我們還需要證明*不超過* Y 的每一個值都能以真正的發射角（即 $\lambda > 0$）達到。作為 λ 的函數，y 是開口向下的二次函數。其頂點（vertex）在 $\lambda_0 = u^2/(gx) > 0$，此處 $y = Y$（代入驗證即可）。當 $\lambda \geq \lambda_0$ 時，y 連續（continuous）且遞減，並且當 $\lambda \to \infty$ 時 $y \to -\infty$。所以由連續性，每個值 $y \leq Y$ 都會在某個 $\lambda \geq \lambda_0 > 0$ 取得，即在某個 $\theta \in (0, \frac{\pi}{2})$ 取得。因此 y 的取值正是整個區間 $y \leq Y$，符合所求。（當 $x = 0$ 時，我們必須垂直向上拋。此時 y 由 0 變到 $u^2/(2g)$，同樣等於 $Y(0)$。）

若容許向任一方向拋射，則 $x < 0$ 的情況是鏡像，同一公式依然成立，因為 Y 只取決於 x^2。

圖像與可到達區域

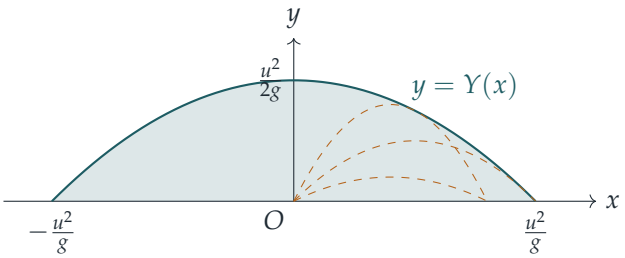
Y 的圖像是一條開口向下的拋物線。其頂點在 $(0, u^2/2g)$，即可能達到的最大高度；它與地面相交於 $x = \pm u^2/g$，即可能達到的最大射程。每一條軌跡都位於這條曲線之下，並在 $\lambda = \lambda_0$ 處與它相切一次。因此它常被稱為*包絡拋物線*（bounding parabola）或*安全拋物線*（parabola of safety）。

質點一碰到地面便停下。取一條 $\lambda > 0$ 的軌跡上一點，其中 $y \geq 0$ 且 $x > 0$。在 O 與該點之間的所有 x，這條軌跡都在地面之上，所以質點確實會在落地前到達該點。因此可

到達的集合是區域

$$0 \le y \le \frac{u^2}{2g} - \frac{gx^2}{2u^2}, \qquad |x| \le \frac{u^2}{g},$$

即下圖的陰影部分。圖中以 u^2/g 為單位，虛線是三條示例軌跡。



與 O 的最遠距離

任何可到達的點 P 都位於由 O 到點 Q 的線段上，其中 Q 是射線 OP 與邊界的交點。該區域以包絡拋物線和地面為邊界，而且沿每條射線都包含 O 與邊界之間的所有點。所以 $OP \le OQ$，我們只需在邊界上求距離的最大值。在地面上，最遠的點距離為 u^2/g。在曲線部分，$y = Y(x)$，所以

$$\begin{aligned} OQ^2 = x^2 + Y^2 &= x^2 + \left(\frac{u^2}{2g}\right)^2 - 2 \cdot \frac{u^2}{2g} \cdot \frac{gx^2}{2u^2} + \left(\frac{gx^2}{2u^2}\right)^2 \\ &= \left(\frac{u^2}{2g}\right)^2 + \frac{x^2}{2} + \left(\frac{gx^2}{2u^2}\right)^2 = \left(\frac{u^2}{2g} + \frac{gx^2}{2u^2}\right)^2. \end{aligned}$$

所以 $OQ = \dfrac{u^2}{2g} + \dfrac{gx^2}{2u^2} = \dfrac{u^2}{g} - Y$。換句話說，與 O 的距離等於向下到直線 $y = u^2/g$ 的距離：O 是包絡拋物線的焦點，而 $y = u^2/g$ 是它的準線（directrix）。當 Y 最小時這個距離最大，而在曲線的可到達部分上，Y 的最小值是 $Y = 0$，位於 $x = \pm u^2/g$。因此拋射體能到達的與 O 的最遠距離是

$$\boxed{\frac{u^2}{g}},$$

這正是最大水平射程，在 $\theta = \frac{\pi}{4}$ 時達到。邊界上每個高度 $y > 0$ 的點都較近，恰好近 y。

驗算

- 代入 $x = 0$：$Y = u^2/(2g)$，即垂直向上拋時達到的高度（由 $v^2 = u^2 - 2gh$ 得出）。代入 $Y = 0$：$x = u^2/g$，即熟悉的最大射程 $u^2 \sin 2\theta / g$（在 $\theta = \frac{\pi}{4}$ 時）。
- 取 $u^2/g = 10$（例如 $u = \sqrt{98}\,\mathrm{m\,s^{-1}}$，$g = 9.8$）。在 $x = 4$ 時，公式給出 $Y = 5 - 0.8 = 4.2$，在 $\lambda_0 = 10/4 = 2.5$ 時達到：確實 $2.5 \cdot 4 - \frac{1}{20} \cdot 16 \cdot 7.25 = 10 - 5.8 = 4.2$。

- 以電腦對大量發射角和時間進行搜索，取 $u = 10\ \mathrm{m\,s^{-1}}$，找到與 O 最遠的點距離為 $10.204\ \mathrm{m} = u^2/g$，位於地面上。

常見錯誤

- 只做到判別式便停下。判別式只顯示 $y \le Y$ 是必要的，但題目還要求每個這樣的值都能以位於地面之上的真正發射角達到。
- 把 $y = Y$ 之下的整個區域都塗上陰影，包括地面以下的點。質點落地便停下，所以可到達的集合還需滿足 $y \ge 0$。
- 以為最遠的點是安全拋物線的頂點。該點與 O 的距離只有 $u^2/(2g)$，是射程的一半。

STEP 之外

包絡拋物線是這族軌跡的包絡線（envelope）：即與族中每一條曲線都相切的曲線。求包絡線的一個標準方法，是在 $F(x,y,\lambda) = 0$ 與 $\partial F/\partial\lambda = 0$ 之間消去參數，而這正是我們所用的重根條件。這裏還有一個與能量的聯繫：每條軌跡都有同一條準線，即直線 $y = u^2/(2g)$，那正是全部動能（kinetic energy）都轉化為勢能（potential energy）時的高度。Kleppner 與 Kolenkow 所著的 *An Introduction to Mechanics*（《力學導論》）以大學一年級程度講解拋射運動與能量。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。