詳細解答

STEP II 2014，第 1 題

純數學 • 三角形幾何與二次方程

> **STEP II 2014，第 1 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/14-s2-q1

關鍵思路

沿着鋸齒形路線 $A \to P \to Q \to B$ 由 A 走到 B。三段路的長度都是 x，合起來必須剛好走過水平距離 1，而淨上升高度為 0。分別沿水平及鉛直方向分解（resolving），得到 $x\cos\theta$ 和 $x\sin\theta$，再利用 $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$ 消去未知角。之後的一切，就只是一條關於 x 的二次方程（quadratic equation）及其判別式（discriminant）。

解答

把 A 放在原點，B 放在 $(1,0)$，而 C 在 AB 上方。由於 P 位於由 A 出發經過 C 的射線（ray）上，與 A 的距離為 x；而 Q 位於由 B 出發經過 C 的射線上，與 B 的距離為 x，所以

$$P = (x\cos\alpha,\ x\sin\alpha), \qquad Q = (1 - x\cos\beta,\ x\sin\beta).$$

第 (i) 部分

水平方向。$\overrightarrow{AP}$、$\overrightarrow{PQ}$ 和 $\overrightarrow{QB}$ 的水平分量（component）分別為 $x\cos\alpha$、$x\cos\theta$ 和 $x\cos\beta$，它們之和等於 $AB = 1$。因此

$$x\cos\theta = 1 - x\cos\alpha - x\cos\beta,$$

這就是第一個結果。（以坐標來說：這是 Q 與 P 的 x 坐標之差。）

鉛直方向。P 的高度為 $x\sin\alpha$，Q 的高度為 $x\sin\beta$，所以

$$x\sin\theta = x\sin\beta - x\sin\alpha.$$

（這個值永不為負：由於三角形的內角和小於 $180°$，有 $\alpha \le \beta < 180° - \alpha$，而在這個區

間上 $\sin\beta \geq \sin\alpha$。所以 Q 永遠不會低於 P。）

消去 θ。把兩式平方後相加，並利用 $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$，得

$$x^2 = (1 - x(\cos\alpha + \cos\beta))^2 + x^2(\sin\beta - \sin\alpha)^2.$$

展開右方，x^2 的係數為

$$\begin{aligned}(\cos\alpha + \cos\beta)^2 + (\sin\beta - \sin\alpha)^2 &= (\cos^2\alpha + \sin^2\alpha) + (\cos^2\beta + \sin^2\beta) \\ &\quad + 2(\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta) \\ &= 2 + 2\cos(\alpha + \beta).\end{aligned}$$

所以 $x^2 = 1 - 2(\cos\alpha + \cos\beta)x + (2 + 2\cos(\alpha + \beta))x^2$。把 x^2 移到右方，得

$$(1 + 2\cos(\alpha + \beta))x^2 - 2(\cos\alpha + \cos\beta)x + 1 = 0, \qquad (*)$$

此即所求。

P 和 Q 在兩邊的延長線上。若 P 位於 AC 的延長線（produced）上，它仍然在由 A 出發經過 C 的射線上，與 A 的距離為 x，所以其坐標仍是 $(x\cos\alpha, x\sin\alpha)$。同理，$Q$ 仍是 $(1 - x\cos\beta, x\sin\beta)$。上面的推導並沒有用到其他東西：由 P 到 Q 的位移為

$$(1 - x\cos\alpha - x\cos\beta,\ x\sin\beta - x\sin\alpha),$$

而 $PQ^2 = x^2$ 給出完全相同的方程 $(*)$。（此時 x 可以大於 AC 和 BC，而 $1 - x\cos\alpha - x\cos\beta$ 可以是負數，所以 θ 可以是鈍角。這並無影響，因為平方後正負號便消失了。）

第 (ii) 部分

方程 $(*)$ 是線性方程，當且僅當 $1 + 2\cos(\alpha + \beta) = 0$，即 $\cos(\alpha + \beta) = -\frac{1}{2}$。由於 $0 < \alpha + \beta < 180°$，唯一的可能是

$$\alpha + \beta = 120°.$$

否則 $(*)$ 是一條真正的二次方程，其判別式的四分之一為

$$\begin{aligned}\tfrac{1}{4}\Delta &= (\cos\alpha + \cos\beta)^2 - (1 + 2\cos\alpha\cos\beta - 2\sin\alpha\sin\beta) \\ &= \cos^2\alpha + \cos^2\beta - 1 + 2\sin\alpha\sin\beta \\ &= 1 - \sin^2\alpha - \sin^2\beta + 2\sin\alpha\sin\beta \\ &= 1 - (\sin\beta - \sin\alpha)^2,\end{aligned}$$

這裏用了 $\cos^2\alpha = 1 - \sin^2\alpha$ 及 $\cos^2\beta - 1 = -\sin^2\beta$。

? **想一想** 為甚麼 $(\sin\beta - \sin\alpha)^2$ 必定小於 1？

兩個角都嚴格介乎 0° 與 180° 之間，所以 $0 < \sin\alpha \le 1$ 及 $0 < \sin\beta \le 1$。兩個屬於 $(0,1]$ 的數之差嚴格介乎 -1 與 1 之間。因此 $(\sin\beta - \sin\alpha)^2 < 1$，故 $\Delta > 0$，而 $(*)$ 有兩個相異實根。

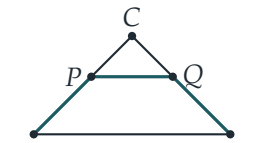
第 (iii) 部分

(a) $\alpha = \beta = 45^\circ$。此時 $\cos(\alpha+\beta) = \cos 90^\circ = 0$ 且 $\cos\alpha + \cos\beta = \sqrt{2}$，所以 $(*)$ 為

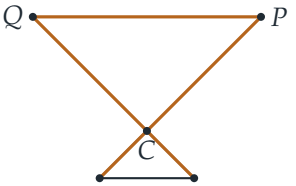
$$x^2 - 2\sqrt{2}\,x + 1 = 0, \qquad x = \sqrt{2} \pm 1.$$

這個三角形是等腰直角三角形，$C = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$，且 $AC = BC = \frac{1}{\sqrt{2}} \approx 0.707$。

- $x = \sqrt{2} - 1 \approx 0.414 < AC$：$P$ 和 Q 位於兩邊上，分別在 $P = (1 - \frac{1}{\sqrt{2}}, 1 - \frac{1}{\sqrt{2}})$ 和 $Q = (\frac{1}{\sqrt{2}}, 1 - \frac{1}{\sqrt{2}})$。由對稱性，$PQ$ 與 AB 平行，所以 $\theta = 0$。驗證：$PQ = \sqrt{2} - 1 = x$。
- $x = \sqrt{2} + 1 \approx 2.414 > AC$：$P$ 和 Q 分別位於 AC 的延長線和 BC 的延長線上，在 $P = (1 + \frac{1}{\sqrt{2}}, 1 + \frac{1}{\sqrt{2}})$ 和 $Q = (-\frac{1}{\sqrt{2}}, 1 + \frac{1}{\sqrt{2}})$。兩條延長線已在 C 點相交而過，所以現在 P 在 Q 的*右方*。PQ 同樣是水平的，長度為 $1 + \sqrt{2} = x$。



$x = \sqrt{2} - 1$

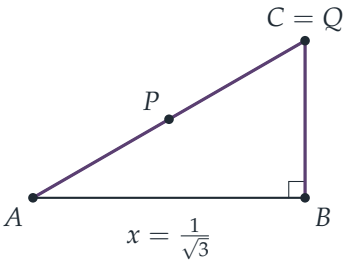


$x = \sqrt{2} + 1$

(b) $\alpha = 30^\circ$，$\beta = 90^\circ$。現在 $\alpha + \beta = 120^\circ$，所以這正是第 (ii) 部分中的線性情況。由於 $\cos\alpha + \cos\beta = \frac{\sqrt{3}}{2}$，$(*)$ 變成

$$-\sqrt{3}\,x + 1 = 0, \qquad x = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

這個三角形的直角在 B，$BC = \tan 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}}$，而 $AC = \frac{2}{\sqrt{3}}$。所以 $QB = BC$ 表示 Q 就是 C，而 $AP = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1}{2}AC$ 使 P 位於 AC 的中點。於是 $PQ = PC = \frac{1}{\sqrt{3}} = x$，正如所料。這是唯一的可能。



第二個根去了哪裏？若 $\alpha+\beta=120°$，直線 AC 和 BC 相交成 60°。當 x 非常大時，沿這兩條直線遠處的點 P 和 Q 之間的距離便幾乎剛好是 x，與 C 組成一個近乎等邊的三角形。當 $\alpha+\beta\to 120°$ 時，二次方程的其中一個根便趨向無窮大。

驗算

- 在 (a) 中，$(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)=1$，與兩根之積 $1/(1+2\cos 90°)=1$ 吻合。
- 對任意一個三角形，例如 $\alpha=40°$、$\beta=70°$，解 $(*)$，定出 P 和 Q 的位置並量度 PQ：對兩個根而言，它都等於 x。我們已用電腦對許多隨機三角形驗證過這一點，誤差約為 10^{-10}。
- 在 (b) 中，$x=1/\sqrt{3}\approx 0.577$ 剛好等於 BC，而 AC 的中點為 $(\frac{1}{2},\frac{1}{2\sqrt{3}})$，與 $C=(1,\frac{1}{\sqrt{3}})$ 的距離為 $\frac{1}{\sqrt{3}}$。

常見錯誤

- 把 $\cos\beta$ 項的正負號弄錯：$\overrightarrow{QB}$ 是朝向 B 的，所以即使 Q 在 B 的左方，其水平分量仍是 $+x\cos\beta$。
- 在第 (ii) 部分中容許 $\alpha+\beta=240°$。三角形的內角和小於 180°。
- 在 (b) 中，首項係數為零時仍試圖使用二次公式，或斷定方程無解。

STEP 之外

把一個封閉的向量多邊形分解成分量，再用 $\cos^2+\sin^2=1$ 消去一個角，是運動學（kinematics）和連桿（linkage）問題中的標準技巧：我們的鋸齒形路線就是一個簡單的三桿連桿。當二次方程退化為線性方程時「逃往無窮遠」的那個根，讓我們初次窺見射影幾何（projective geometry）。在射影幾何中，平行線相交於無窮遠點，而只要把這些點也計算在內，二次方程總有兩個根。Coxeter 與 Greitzer 合著的 *Geometry Revisited*

(《幾何再探》) 是在這個程度上踏入古典幾何的絕佳入門書。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。