詳細解答

STEP I 2014，第 9 題

力學 • 受水平力作用的拋體

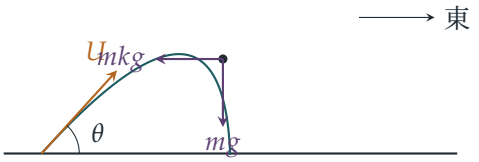
> **STEP I 2014，第 9 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/14-s1-q9

關鍵思路

兩個力都是恆定的，所以每個方向上的加速度（acceleration）都是常數，我們可以把水平運動和豎直運動分開處理，做法和普通拋射體（projectile）完全一樣。豎直運動完全不受向西的力影響。新的地方在於水平速度不斷減少，所以質點會在某一刻停止向東移動，然後往西飄回去。整條軌跡的形狀取決於這一刻何時出現，以及它與飛行最高點和落地時刻的先後關係。

解答

把質點視為在豎直平面內運動的質點（point mass），除了重量和題目給出的水平力之外不受其他力。取 x 向東、y 豎直向上，原點設在拋出點。



時間 T_H 與 T_L

在每個方向上應用牛頓第二定律（Newton's second law），再除以 m，得

$$\ddot{x} = -kg, \qquad \ddot{y} = -g.$$

初速度為 $(U\cos\theta,\ U\sin\theta)$，所以積分兩次，得

$$\dot{x} = U\cos\theta - kgt, \qquad x = Ut\cos\theta - \tfrac{1}{2}kgt^2,$$
$$\dot{y} = U\sin\theta - gt, \qquad y = Ut\sin\theta - \tfrac{1}{2}gt^2.$$

當 $\dot{y} = 0$ 時到達最大高度，而質點在 $y = 0$ 且 $t > 0$ 時落地：

$$\boxed{T_H = \frac{U\sin\theta}{g}, \qquad T_L = \frac{2U\sin\theta}{g}.}$$

這些結果與沒有向西的力時相同，因為那個力沒有豎直分量。

T 的意義

題目給出的時間 $T = \dfrac{U\cos\theta}{kg}$ 正是 $\dot{x} = 0$ 的時刻。在 T 之前質點向東移動；在 T 之後它向西移動。所以，如果質點在時刻 T 仍在空中，那就是它位於最東的時刻。比較這三個時間：

$$\frac{T_H}{T} = \frac{U\sin\theta}{g}\cdot\frac{kg}{U\cos\theta} = k\tan\theta, \qquad \frac{T_L}{T} = 2k\tan\theta.$$

知道質點在哪裏落地也會有幫助：

$$x(T_L) = T_L\left(U\cos\theta - \tfrac{1}{2}kgT_L\right) = \frac{2U^2\sin\theta}{g}(\cos\theta - k\sin\theta) = \frac{2U^2\sin\theta\cos\theta}{g}(1 - k\tan\theta).$$

若 $k\tan\theta < 1$，這個值為正（在起點以東）；若 $k\tan\theta > 1$，則為負（在起點以西）。

> ? **想一想** 軌跡不再對稱，那麼它實際上是甚麼樣子？

加速度 $(-kg, -g)$ 是常數，所以軌跡仍然是拋物線（parabola），只是它的對稱軸傾斜了：這就是在大小為 $g\sqrt{1+k^2}$、指向西下方的「重力」作用下所得到的拋物線。飛行的最高點不再是拋物線的頂點，而下面三種情況討論的，就是最東點（時刻 T）落在甚麼位置。

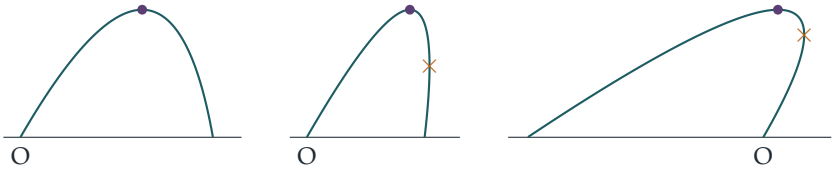
三種情況

情況 $k\tan\theta < \frac{1}{2}$。此時 $T_H < T_L < T$。質點在向東的速度耗盡之前已經落地，所以全程向東移動。軌跡看起來像普通的拋射軌跡，上升到最高點後下降，而由於水平速率不斷減少，下降時比上升時更陡。它落在起點以東。

情況 $\frac{1}{2} < k\tan\theta < 1$。此時 $T_H < T < T_L$。質點在仍向東移動時經過最高點，下降時繼續向東，直到時刻 T，此時它的速度豎直向下，之後便向西彎回，然後落地。由於 $k\tan\theta < 1$，它仍然落在起點以東，但在其最東點以西。

情況 $k\tan\theta > 1$。此時 $T < T_H$。質點仍在上升時，向東的運動已經停止，那一刻它正豎直向上移動。它在已經向西移動時才到達最大高度，然後下降並落在拋出點以西。

下面的草圖展示了這三種情況，取 $\theta = 60°$，而 U 和 g 相同，分別有 $k\tan\theta \approx 0.35$、0.6 和 1.8。圓點標示時刻 T_H 的最高點，叉號標示時刻 T 的最東點，O 為拋出點。



$k\tan\theta < \frac{1}{2}$　　$\frac{1}{2} < k\tan\theta < 1$　　$k\tan\theta > 1$

$k\tan\theta = 1$ 的情況

此時 $T = T_H$，所以在飛行最高點時，速度的兩個分量同時為零，質點瞬間靜止。此外 $x(T_L) = 0$，所以它落回拋出點。

事實上，質點沿一條直線運動。當 $\tan\theta = 1/k$ 時，初速度 $U(\cos\theta, \sin\theta)$ 是 $(k,1)$ 的正數倍，而加速度 $(-kg, -g) = -g(k,1)$ 恰好指向相反方向。一個加速度恆定且與速度方向正好相反的質點會沿直線運動：它沿拋射線向上移動，以 $g\sqrt{1+k^2}$ 減速，在時刻 T_H 停下，然後沿同一直線滑回，在時刻 $T_L = 2T_H$ 落回起點。你可以從方程驗證這一點：取 $k = \cot\theta$，

$$x\tan\theta = Ut\sin\theta - \tfrac{1}{2}gt^2 = y \quad \text{對所有} t,$$

所以質點始終不離開直線 $y = x\tan\theta$。

驗算

- 令 $k \to 0$，則 $T \to \infty$，所以永遠屬於第一種情況，而 $x(T_L)$ 變成熟悉的射程 $U^2\sin 2\theta/g$。
- 落地位置 $\frac{2U^2\sin\theta\cos\theta}{g}(1 - k\tan\theta)$ 恰好在 $k\tan\theta = 1$ 時變號，與第二、第三種情況的分界吻合。
- 取 $U = g = 1$、$\theta = 60°$ 和 $k = 0.45$，質點落在 $x \approx 0.191$，但在時刻 $T \approx 1.11$ 到達 $x = \frac{\cos^2\theta}{2k} \approx 0.278$，該時刻介於 $T_H \approx 0.87$ 與 $T_L \approx 1.73$ 之間，所以它確實在落地前折返。對運動進行逐步數值積分（numerical integration），結果與三個時間及落地點全部吻合。

常見錯誤

- 讓向西的力影響豎直運動：T_H 和 T_L 完全不涉及 k。

- 假設最高點就是軌跡的「中間」。有了水平力，軌跡是一條傾斜的拋物線，所以最高點和最東點並不相同。
- 把第二種情況畫成質點落在起點以西：它雖然折返，但由於 $k\tan\theta < 1$，折返得不夠遠。

STEP 之外

任何方向上的恆定加速度總會產生拋物線。這裏的等效重力只是傾斜了，把坐標軸旋轉至與它對齊，問題便變回普通的拋射體問題。這種選取與受力相配合的坐標的想法，是大學一年級力學的核心內容；同樣重要的還有均勻電場中的帶電粒子，它們的行為正是如此。Kleppner 與 Kolenkow 的 *An Introduction to Mechanics*（《力學導論》）細緻地發展了這些想法。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。