詳細解答

STEP I 2014，第 8 題

純數學 • 直線族的包絡線

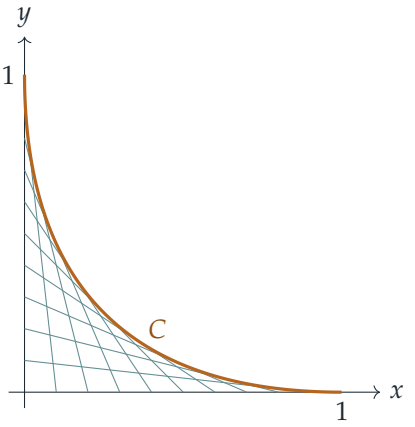
STEP I 2014，第 8 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

step.maths.org/questions/14-s1-q8

關鍵思路

把每條直線寫成截距式（intercept form）$\frac{x}{a}+\frac{y}{1-a}=1$；這樣，兩條直線的交點便可從一對線性方程中直接求出，而且結果對 a 和 b 是對稱的。令 $b\to a$，便得到一條直線與其「鄰居」的交點，這些點描出一條曲線，而每條直線 L_a 都與這條曲線相切。曲線 C 就是這族直線的包絡線（envelope），而第 (iii) 部分則從另一個方向證實這一點。



解答

經過 $(a,0)$ 和 $(0,1-a)$ 的直線，其截距（intercept）為 a 和 $1-a$，所以

$$L_a:\ \frac{x}{a}+\frac{y}{1-a}=1,\qquad \text{即}\qquad (1-a)x+ay=a(1-a).$$

第 (i) 部分

我們解

$$(1-a)x + ay = a(1-a),$$
$$(1-b)x + by = b(1-b).$$

為了消去 y，把第一條方程乘以 b，第二條乘以 a，然後相減：

$$[b(1-a) - a(1-b)]x = ab(1-a) - ab(1-b), \qquad \text{即} \qquad (b-a)x = ab(b-a).$$

由於 $a \neq b$，我們可以除以 $b-a$，得 $x = ab$。代入第一條方程，

$$ay = a(1-a) - (1-a)ab = a(1-a)(1-b),$$

又因 $a \neq 0$，得 $y = (1-a)(1-b)$。所以 L_a 與 L_b 相交於

$$(ab,\ (1-a)(1-b)).$$

（答案對 a 和 b 對稱，這是理所當然的。你也可以驗證它同樣位於 L_b 上：$(1-b)ab + b(1-a)(1-b) = b(1-b)(a+1-a) = b(1-b)$。）

第 (ii) 部分

兩個坐標都是 b 的多項式（polynomial），因此是連續（continuous）的，所以當 $b \to a$ 時的極限（limit）就是在 $b = a$ 處的值：

$$(x, y) = (a^2,\ (1-a)^2).$$

由於 $0 < a < 1$，我們有 $0 < x = a^2 < 1$，又因為 $a > 0$，取正平方根便得 $\sqrt{x} = a$。因此

$$y = (1-a)^2 = (1-\sqrt{x})^2,$$

所以極限點位於 C 上，得證。

第 (iii) 部分

在 C 上任取一點。它的 x 坐標位於 $(0,1)$ 之內，所以可以寫成 t^2，其中 $t = \sqrt{x} \in (0,1)$，而該點就是 $(t^2, (1-t)^2)$。

用鏈式法則（chain rule）對 $y = (1-\sqrt{x})^2$ 求導，

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 2(1-\sqrt{x}) \cdot \left(-\frac{1}{2\sqrt{x}}\right) = -\frac{1-\sqrt{x}}{\sqrt{x}},$$

在 $x = t^2$ 處其值為 $-\frac{1-t}{t}$。該處的切線（tangent）為

$$y - (1-t)^2 = -\frac{1-t}{t}\,(x - t^2).$$

想一想 我們怎樣看出這條直線是其中一條 L_a？

一條直線 L_a 由它的兩個截距完全確定，而這兩個截距必須是 a 和 $1-a$。所以，求出切線的截距。

- 令 $y=0$：$-(1-t)^2 = -\frac{1-t}{t}(x-t^2)$。由於 $1-t \neq 0$，可以約去，得 $x-t^2 = t(1-t)$，所以 $x=t$。
- 令 $x=0$：$y=(1-t)^2+\frac{1-t}{t}t^2=(1-t)^2+t(1-t)=1-t$。

所以切線經過 $(t,0)$ 和 $(0,1-t)$，且 $0<t<1$：它正是 L_t。由於 C 上每一點都由某個 $t\in(0,1)$ 給出，C 的每條切線都具有 L_a 的形式（在切點處 $a=\sqrt{x}$）。證明完畢。

留意在 $\left(a^2,(1-a)^2\right)$ 處的切線是 L_a，而這一點正是第 (ii) 部分由 L_a 得出的點：每條直線都在它自己的極限交點處與 C 相切。

驗算

- 取 $a=\frac{1}{2}$、$b=\frac{1}{3}$，第 (i) 部分給出 $\left(\frac{1}{6},\frac{1}{3}\right)$。在 $L_{1/2}$ 上：$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{6}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{4}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}$；在 $L_{1/3}$ 上：$\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{6}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}=\frac{2}{9}=\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}$。
- 在 $x=\frac{1}{4}$ 處，曲線的 $y=\frac{1}{4}$，斜率為 -1，所以切線是 $x+y=\frac{1}{2}$，即經過 $(\frac{1}{2},0)$ 和 $(0,\frac{1}{2})$ 的 $L_{1/2}$。
- 曲線本身是拋物線（parabola）$\sqrt{x}+\sqrt{y}=1$ 的一部分，對 x 和 y 對稱，與這族直線的對稱性 $a\leftrightarrow 1-a$ 吻合。

常見錯誤

- 在第 (ii) 部分忘記解釋為何 $\sqrt{x}=a$：這需要 $a>0$，而題目已給出此條件。
- 在第 (iii) 部分只證明了 L_a 與 C 相切。題目要求的是逆命題：從 C 的任意一條切線出發，證明它是某條 L_a。

STEP 之外

曲線 C 是直線族 L_a 的**包絡線**：即與族中每一條直線都相切的曲線。一般而言，曲線族 $F(x,y,a)=0$ 的包絡線，可以從 $F=0$ 和 $\partial F/\partial a=0$ 中消去 a 而求得，這正是第 (ii) 部分「令 $b\to a$」取極限的微積分版本。包絡線在光學中以焦散線（caustics）的形式出現，例如咖啡杯中那條明亮的光線曲線。Siklos 的 *Advanced Problems in Mathematics*（《高等數學難題》）收錄了更多同類題目。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。