詳細解答

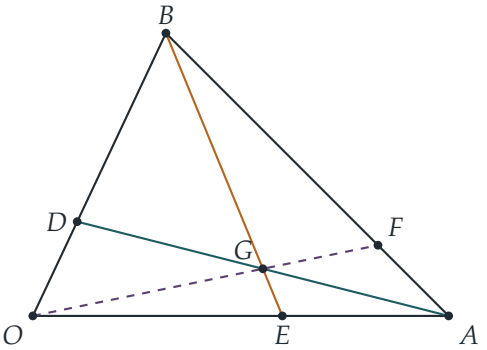
STEP I 2014，第 7 題

純數學 • 三角形中的向量

> **STEP I 2014，第 7 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/14-s1-q7

關鍵思路

把每一點都寫成 **a** 與 **b** 的組合。經過兩個已知點的直線上的點，有一條單參數的向量方程（vector equation），所以 G 可以用兩種方式表示，每條直線各給出一種。由於 **a** 與 **b** 不平行（三角形並非退化），我們可以比較係數（comparing coefficients），從而得到關於兩個參數的兩條簡單方程。



解答

首先確定 D 和 E 的位置。由於 $BD = r\,DO$，點 D 位於由 O 到 B 的路程的 $\frac{1}{1+r}$ 處；由於 $OE = s\,EA$，點 E 位於由 O 到 A 的路程的 $\frac{s}{1+s}$ 處。所以

$$\mathbf{d} = \frac{1}{1+r}\,\mathbf{b}, \qquad \mathbf{e} = \frac{s}{1+s}\,\mathbf{a}.$$

第 (i) 部分

直線 AD 上的一般點為

$$\mathbf{a}+\lambda(\mathbf{d}-\mathbf{a})=(1-\lambda)\,\mathbf{a}+\frac{\lambda}{1+r}\,\mathbf{b},$$

而直線 BE 上的一般點為

$$\mathbf{b}+\mu(\mathbf{e}-\mathbf{b})=\frac{\mu s}{1+s}\,\mathbf{a}+(1-\mu)\,\mathbf{b}.$$

在 G 處，兩者相等。

? **想一想** 為甚麼我們可以分別令 **a** 的係數相等及 **b** 的係數相等？

因為 O、A、B 構成一個真正的三角形，所以 **a** 與 **b** 都不是零向量，而且互不平行。若 $\alpha\mathbf{a}+\beta\mathbf{b}=\alpha'\mathbf{a}+\beta'\mathbf{b}$ 而 $\alpha\neq\alpha'$，則 **a** 便會是 **b** 的倍數，這是不可能的。所以

$$1-\lambda=\frac{\mu s}{1+s},\qquad \frac{\lambda}{1+r}=1-\mu.$$

由第二條方程得 $\lambda=(1+r)(1-\mu)$。代入第一條方程，

$$\begin{aligned}1-(1+r)(1-\mu)&=\frac{\mu s}{1+s}\\ \mu\left[(1+r)-\frac{s}{1+s}\right]&=r\\ \mu\,\frac{(1+r)(1+s)-s}{1+s}&=r\\ \mu\,\frac{1+r+rs}{1+s}&=r,\end{aligned}$$

所以

$$\mu=\frac{r(1+s)}{1+r+rs}.$$

由於 $r,s>0$，有 $1+r+rs>0$，所以這一步是容許的。把這個 μ 值代入 BE 的方程，**a** 的係數為

$$\frac{\mu s}{1+s}=\frac{rs}{1+r+rs},$$

而 **b** 的係數為

$$1-\mu=\frac{1+r+rs-r-rs}{1+r+rs}=\frac{1}{1+r+rs}.$$

因此

$$\mathbf{g}=\frac{rs}{1+r+rs}\,\mathbf{a}+\frac{1}{1+r+rs}\,\mathbf{b},$$

得證。

第 (ii) 部分

由於直線 OG 經過原點，其上每一點都是 $\mathbf{g}$ 的純量倍數 $k\mathbf{g}$：

$$k\mathbf{g} = \frac{k}{1+r+rs}\,(rs\,\mathbf{a} + \mathbf{b}).$$

由於 AB 由點 $(1-\nu)\mathbf{a} + \nu\mathbf{b}$ 組成，點 $\alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{b}$ 位於直線 AB 上當且僅當 $\alpha + \beta = 1$。所以在 F 處我們需要 $k(rs+1) = 1 + r + rs$，於是

$$\mathbf{f} = \frac{rs}{1+rs}\,\mathbf{a} + \frac{1}{1+rs}\,\mathbf{b}.$$

另一方面，$AF = t\,FB$ 表示 F 位於由 A 到 B 的路程的 $\frac{t}{1+t}$ 處：

$$\mathbf{f} = \frac{1}{1+t}\,\mathbf{a} + \frac{t}{1+t}\,\mathbf{b}.$$

比較 $\mathbf{a}$ 的係數（理由與前面相同）得 $1 + t = \dfrac{1+rs}{rs}$，所以

$$t = \frac{1}{rs}.$$

$\mathbf{b}$ 的係數亦相符：$\dfrac{t}{1+t} = \dfrac{1/(rs)}{(1+rs)/(rs)} = \dfrac{1}{1+rs}$。

驗算

- **中線**。當 $r = s = 1$ 時，D 和 E 是中點，所以 G 應該是重心（centroid）。公式給出 $\mathbf{g} = \frac{1}{3}\mathbf{a} + \frac{1}{3}\mathbf{b}$，這是正確的；而 $t = 1$，所以 F 是 AB 的中點。這是必然的，因為三條中線（median）共點（concurrent）。
- **塞瓦定理**。答案表明 $r \cdot s \cdot t = 1$，即 $\dfrac{BD}{DO} \cdot \dfrac{OE}{EA} \cdot \dfrac{AF}{FB} = 1$，這正是共點直線 AD、BE、OF 的塞瓦定理（Ceva's theorem）。
- **一個數值例子**。取 $\mathbf{a} = (5,0)$、$\mathbf{b} = (0,5)$、$r = 2$、$s = 3$。那麼 $D = (0, \frac{5}{3})$、$E = (\frac{15}{4}, 0)$，而公式給出 $G = (\frac{30}{9}, \frac{5}{9}) = (\frac{10}{3}, \frac{5}{9})$。這點位於方程為 $x + 3y = 5$ 的 AD 上，亦位於方程為 $4x + 3y = 15$ 的 BE 上。直線 OG 與 $x + y = 5$ 相交於 $F = (\frac{30}{7}, \frac{5}{7})$，而 $\overrightarrow{AF} = (-\frac{5}{7}, \frac{5}{7})$、$\overrightarrow{FB} = (-\frac{30}{7}, \frac{30}{7})$，所以 $AF : FB = 1 : 6$，得 $t = \frac{1}{6} = \frac{1}{rs}$。這些公式亦已用電腦以精確算術，對二千個隨機三角形及比例驗證過。

常見錯誤

- 把比例弄反：$BD = r\,DO$ 使 D 位於由 O 到 B 的路程的 $\frac{1}{1+r}$ 處，而不是 $\frac{r}{1+r}$ 處。
- 比較係數時沒有說明為何可行：這需要 $\mathbf{a}$ 與 $\mathbf{b}$ 不平行。
- 在第 (ii) 部分忘記把 $\mathbf{g}$ 重新縮放：G 本身並不在 AB 上，因為它的係數之和小於 1。

STEP 之外

像 **f** 的係數那樣總和為 1 的係數，稱為重心坐標（barycentric coordinates）。它們以各頂點上的權重來描述點，並使塞瓦定理和梅涅勞斯（Menelaus）定理等結果幾乎水到渠成。用線性代數（linear algebra）的語言來說，比較係數之所以可行，是因為 **a** 與 **b** 線性獨立（linearly independent），因而構成平面的一組基（basis）。Strang 的 *Introduction to Linear Algebra*（《線性代數導論》）對基和坐標有細緻的闡述。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。