詳細解答

STEP I 2014，第 6 題

純數學 • 遞輯斯諦映射的遞推關係

STEP I 2014，第 6 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

step.maths.org/questions/14-s1-q6

本題在 *Beyond STEP* 第 8.7 節可以解出的混沌中有完整的引導式講解：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/ch08/solvable-chaos.html

關鍵思路

表達式 $4x(1-x)$ 看起來很彆扭，但只要令 $x = \sin^2\theta$，便有 $1-x = \cos^2\theta$，而 $4\sin^2\theta\cos^2\theta = (2\sin\theta\cos\theta)^2$ 其實是喬裝了的二倍角公式（double-angle formula）。遞推關係（recurrence）的每一步只是把角度加倍。第 (ii) 部分的重點則在於認出：只要係數（coefficients）滿足某一個條件，任何二次遞推關係都可以透過線性變量代換（linear change of variable）化為這一個。

解答

第 (i) 部分

由 $u_0 = \sin^2\theta$ 得 $1-u_0 = \cos^2\theta$，所以

$$u_1 = 4\sin^2\theta\cos^2\theta = (2\sin\theta\cos\theta)^2 = \sin^2 2\theta.$$

這與 u_0 的形式完全相同，只是把 θ 換成 2θ，因此同樣的計算給出

$$u_2 = 4\sin^2 2\theta\,\cos^2 2\theta = \sin^2 4\theta.$$

角度每一步都加倍，所以我們猜想（conjecture）

$$u_n = \sin^2(2^n\theta) \qquad (n \geq 0).$$

用歸納法（*induction*）證明。當 $n=0$ 時，式子即 $u_0=\sin^2\theta$，成立。假設對某個 $k\geq 0$ 有 $u_k=\sin^2(2^k\theta)$。那麼 $1-u_k=\cos^2(2^k\theta)$，而

$$\begin{aligned} u_{k+1} &= 4\sin^2(2^k\theta)\cos^2(2^k\theta) \\ &= \big(2\sin(2^k\theta)\cos(2^k\theta)\big)^2 \\ &= \sin^2(2^{k+1}\theta), \end{aligned}$$

這裏用了 $\sin 2A = 2\sin A\cos A$，其中 $A=2^k\theta$。因此 k 的結果蘊涵 $k+1$ 的結果，由歸納法，對所有 $n\geq 0$ 都有 $u_n=\sin^2(2^n\theta)$。

第 (ii) 部分

設 $v_n=\alpha u_n+\beta$，其中 $\alpha\neq 0$（需要 $\alpha\neq 0$，才能由 v_n 還原 u_n）。代入 v_n 的遞推關係：

$$\alpha u_{n+1}+\beta = -p(\alpha u_n+\beta)^2+q(\alpha u_n+\beta)+r.$$

展開後除以 α，

$$u_{n+1} = -p\alpha\, u_n^2 + (q-2p\beta)\,u_n + \frac{-p\beta^2+(q-1)\beta+r}{\alpha}.$$

我們希望這就是 $u_{n+1}=4u_n-4u_n^2$，所以比較係數。

- u_n^2：$p\alpha=4$，所以 $\alpha=\dfrac{4}{p}$（由於 $p\neq 0$，這沒有問題，而且此時 $\alpha\neq 0$ 亦成立）。
- u_n：$q-2p\beta=4$，所以 $\beta=\dfrac{q-4}{2p}$。
- 常數項：$-p\beta^2+(q-1)\beta+r=0$。

前兩條確定了 α 和 β；第三條於是成為 p、q、r 須滿足的條件。代入 $\beta=(q-4)/(2p)$，再整條乘以 $4p$：

$$\begin{aligned} & 0 = -p\cdot\frac{(q-4)^2}{4p^2}+(q-1)\frac{q-4}{2p}+r \\ \iff\quad & 0 = -(q-4)^2+2(q-1)(q-4)+4pr \\ & \quad = (q-4)\big(-(q-4)+2(q-1)\big)+4pr \\ & \quad = (q-4)(q+2)+4pr \\ & \quad = q^2-2q-8+4pr. \end{aligned}$$

所以若 $4pr=8+2q-q^2$，則取 $\alpha=4/p$ 及 $\beta=(q-4)/(2p)$ 時三個係數全部吻合，而數列 $u_n=(v_n-\beta)/\alpha$ 滿足 $(*)$，正如所求。

該特定數列。這裏 $p=1$、$q=2$、$r=2$。條件成立：$4pr=8$，而 $8+2q-q^2=8+4-4=8$。我們得到

$$\alpha=4,\qquad \beta=\frac{2-4}{2}=-1,\qquad \text{所以}\qquad v_n=4u_n-1.$$

? **想一想** 第 (i) 部分需要 $u_0 = \sin^2\theta$。這裏能否找到合適的 θ？

由於 $v_0 = 1$，我們需要 $u_0 = (1+1)/4 = \frac{1}{2}$，而 $\frac{1}{2} = \sin^2\frac{\pi}{4}$。所以 $\theta = \pi/4$ 可行，由第 (i) 部分得 $u_n = \sin^2(2^n\pi/4) = \sin^2(2^{n-2}\pi)$。因此

$$v_n = 4\sin^2\left(2^{n-2}\pi\right) - 1 = 1 - 2\cos\left(2^{n-1}\pi\right),$$

這裏用了 $2\sin^2 A = 1 - \cos 2A$。逐項計算：

- $n = 0$：$v_0 = 4\sin^2\frac{\pi}{4} - 1 = 1$；
- $n = 1$：$v_1 = 4\sin^2\frac{\pi}{2} - 1 = 3$；
- $n \geq 2$：2^{n-2} 是整數，所以 $\sin(2^{n-2}\pi) = 0$，而 $v_n = -1$。

所以數列是

$$1,\ 3,\ -1,\ -1,\ -1,\ \ldots$$

即 $v_0 = 1$、$v_1 = 3$，而對所有 $n \geq 2$ 有 $v_n = -1$。

驗算

直接迭代遞推關係：$v_1 = -1 + 2 + 2 = 3$，$v_2 = -9 + 6 + 2 = -1$，以及 $v_3 = -1 - 2 + 2 = -1$；由於 -1 映射到自身，數列此後一直停留在 -1，與公式相符。至於第 (i) 部分，試取 $\theta = \pi/6$：$u_0 = \frac{1}{4}$，$u_1 = 4\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{4} = \frac{3}{4} = \sin^2\frac{\pi}{3}$，以及 $u_2 = 4\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{4} = \frac{3}{4} = \sin^2\frac{2\pi}{3}$，與預測一致。公式 $u_n = \sin^2(2^n\theta)$ 亦已用電腦就多個隨機角度及首若干項驗證過。

常見錯誤

- 寫成 $u_n = \sin^2(2n\theta)$：角度每次加倍，所以增長方式是 2^n，而不是 $2n$。
- 忘記檢查初始值 $u_0 = (v_0 - \beta)/\alpha$ 是否落在 $[0,1]$ 內，從而確實能寫成 $\sin^2\theta$。
- 把常數項方程當作要解第三個未知數，而不是把它看成題目要你推導出的條件。

STEP 之外

遞推關係 $u_{n+1} = 4u_n(1-u_n)$ 是取最極端參數時的邏輯斯諦映射（logistic map），是混沌（chaos）的標準例子：由於 $u_n = \sin^2(2^n\theta)$，把 θ/π 寫成二進制（binary）便可看出，每一步只是把二進制數字移動一位，因此兩個相近的初始值會以指數速度分開。第 (ii)

部分的代換是一種共軛（conjugacy），意思是兩個動力系統（dynamical systems）在變換坐標之後其實是同一個系統。Strogatz 的 *Nonlinear Dynamics and Chaos*（《非線性動力學與混沌》）是這些概念非常易讀的入門書。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。