詳細解答

STEP I 2014，第 5 題

純數學 • 三次不等式

> **STEP I 2014，第 5 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/14-s1-q5

關鍵思路

第 (i) 部分是一個單變量三次函數（cubic），它在 $x \geq 0$ 上的最小值恰好是零，並在 $x = a$ 處與軸相切。這一條不等式 $(x+2a)^3 \geq 27a^2x$，其實是經過偽裝的算術—幾何平均不等式（AM–GM inequality）：左邊涉及和 $x + a + a$，右邊則涉及積 $x \cdot a \cdot a$。第 (ii) 及 (iii) 部分的關鍵在於選擇以甚麼作為 x 和 a，並準確追蹤等號何時成立。

解答

第 (i) 部分

求導數（derivative）：

$$f'(x) = 3(x+2a)^2 - 27a^2 = 3((x+2a)^2 - 9a^2) = 3(x-a)(x+5a),$$

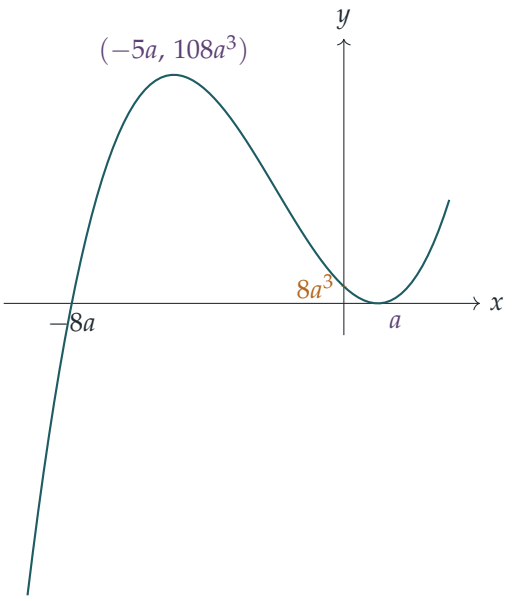
所以駐點（stationary points）位於 $x = a$ 及 $x = -5a$。在這兩點，

$$f(a) = (3a)^3 - 27a^3 = 0, \qquad f(-5a) = (-3a)^3 + 135a^3 = 108a^3,$$

而 $f(0) = 8a^3$。由於 f 是首項係數為正的三次函數，$x = -5a$ 是局部極大點，$x = a$ 是局部極小點。因為極小值是 0，圖像在 $x = a$ 處與 x 軸相切，所以 $(x-a)^2$ 是一個因式；再比較常數項，便得

$$f(x) = (x-a)^2(x+8a),$$

你可以把兩邊都展開成 $x^3 + 6ax^2 - 15a^2x + 8a^3$ 來驗證。



當 $x \geq 0$ 時，圖像由高度 $8a^3 \geq 0$ 開始，下降至 $x = a$ 處的 0，然後一直上升。所以 f 在 $x \geq 0$ 上的最小值是 0，並且

$$f(x) \geq 0 \quad \text{當} x \geq 0,$$

等號只在 $x = a$ 時成立。（因式分解後的形式直接說明了同一件事：當 $x \geq 0$ 時，$(x - a)^2 \geq 0$，而且除非 $x = a = 0$，否則 $x + 8a > 0$。）若 $a = 0$，圖像退化為 $f(x) = x^3$，它在 $x \geq 0$ 時仍然非負，等號只在 $x = 0 = a$ 時成立。在所有情況下，

$$(x + 2a)^3 \geq 27a^2x \quad (x, a \geq 0), \qquad \text{等號成立當且僅當} x = a.$$

第 (ii) 部分

我們想處理 xy^2，所以在第 (i) 部分中取 $a = y \geq 0$。對於 $x \geq 0$、$y \geq 0$，

$$27xy^2 \leq (x + 2y)^3 \leq 3^3 = 27,$$

第二步成立是因為 $0 \leq x + 2y \leq 3$，而立方是遞增函數。因此在整個區域內 $xy^2 \leq 1$。

這個上界是可以達到的：等號需要 $x = y$（來自第 (i) 部分）及 $x + 2y = 3$，由此得 $x = y = 1$，而確實 $1 \cdot 1^2 = 1$。所以 xy^2 的最大值是 1，只在 $x = 1$、$y = 1$ 時取得。

第 (iii) 部分

? **想一想** 第 (i) 部分只涉及兩個數 x 和 a。它怎能告訴我們關於三個數的事情？

把 q 和 r 合在一起：設 $x = p$ 及 $2a = q + r$，所以 $a = \frac{1}{2}(q + r) \geq 0$。由第 (i) 部分得

$$(p + q + r)^3 \geq 27p\left(\frac{q + r}{2}\right)^2.$$

而 $\left(\frac{q+r}{2}\right)^2 - qr = \frac{(q-r)^2}{4} \geq 0$，且 $p \geq 0$，所以

$$(p + q + r)^3 \geq 27p\left(\frac{q + r}{2}\right)^2 \geq 27pqr,$$

這正是所求的不等式。

等號情況。若 $(p + q + r)^3 = 27pqr$，則這串不等式中的兩個不等號都必須取等號。

- 第一個取等號，當且僅當 $x = a$，即 $p = \frac{1}{2}(q + r)$。
- 第二個取等號，當且僅當 $\frac{27}{4}p(q - r)^2 = 0$，即 $p = 0$ 或 $q = r$。

若 $p = 0$，第一個條件給出 $q + r = 0$，所以亦有 $q = r = 0$。若 $q = r$，第一個條件給出 $p = q$。無論哪種情況，都有 $p = q = r$。反過來，若 $p = q = r$，則兩邊都等於 $27p^3$。所以等號成立當且僅當

$$p = q = r.$$

驗算

- 展開 $(x - a)^2(x + 8a)$ 可得回 $(x + 2a)^3 - 27a^2x$；取 $a = 1$，$f(0) = 8$、$f(1) = 0$、$f(3) = 4 \cdot 11 = 44$，全部非負。
- 在第 (ii) 部分，試試直線 $x + 2y = 3$ 上的其他點：$(x, y) = (2, \frac{1}{2})$ 給出 $\frac{1}{2}$，$(0.5, 1.25)$ 給出約 0.78，兩者都小於 1。用電腦在三角形上的細密網格中搜尋，亦得到最大值 1，位於 $(1, 1)$。
- 在第 (iii) 部分，$p = 1, q = 2, r = 3$ 給出 $216 \geq 162$；用電腦在較小的正整數中搜尋，發現只有當 $p = q = r$ 時等號才成立。

常見錯誤

- 證明了 $f(a) = 0$，卻沒有解釋為何這是 $x \geq 0$ 上的最小值：你需要用到圖像的形狀（或因式分解），包括端點值 $f(0) = 8a^3 \geq 0$。
- 在第 (ii) 部分，忘記檢查上界 1 是否真的可以達到；單有上界並不等於最大值。
- 在第 (iii) 部分的等號情況中，只得出 $q = r$，而遺漏了另一可能 $p = 0$；這情況必須排除（或證明它迫使 $p = q = r = 0$）。

STEP 之外

第 (iii) 部分就是三項的算術—幾何平均不等式 $\frac{1}{3}(p+q+r) \geq \sqrt[3]{pqr}$；而這裏的方法——把兩個變量合併為它們的平均值，再運用一條雙變量不等式——正是 n 項算術—幾何平均不等式各種經典證明的雛形。第 (ii) 部分是一個小型的約束最優化（constrained optimisation）問題，大學課程通常以拉格朗日（Lagrange）乘數法處理這類問題，不過像算術—幾何平均不等式這類不等式，往往能更簡潔地得出答案。如想看更多同類風格的內容，可參閱 Siklos，*Advanced Problems in Mathematics*。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。