詳細解答

STEP I 2014，第 4 題

純數學 • 相關變率

> **STEP I 2014，第 4 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/14-s1-q4

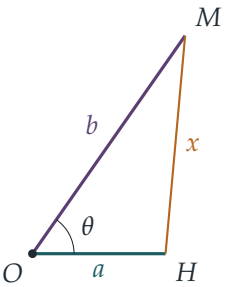
關鍵思路

兩支指針與連接兩針尖端的線段構成一個三角形，所以利用餘弦定律（cosine rule）便可以用 θ 表示 x。由於時鐘準確，θ 以恆定速率增加，因此 x 的增加率就是這個常數乘以 $\mathrm{d}x/\mathrm{d}\theta$。求這個量的最大值就變成一道普通的單變量微積分題目，而駐點（stationary point）方程原來是一條關於 $\cos\theta$ 的二次方程，而且可以整齊地因式分解。

解答

x 的增加率

設 O 為轉軸，H 為時針尖端，M 為分針尖端，於是 $OH = a$、$OM = b$、$\angle HOM = \theta$ 及 $HM = x$。



由餘弦定律，

$$x^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\theta.$$

注意 $x \geq b - a > 0$，所以我們可以放心除以 x。對時間 t 求導，

$$2x\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = 2ab\sin\theta\,\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}.$$

時鐘準確，所以每支指針都以恆定的角速率（angular speed）轉動，而兩針之間的夾角以恆定速率 $\omega > 0$ 改變（即兩個角速率之差；當 $0 \leq \theta < \pi$ 時，分針正在拋離時針，所以 θ 在增加）。因此

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \omega\, ab\,\frac{\sin\theta}{x}.$$

所以我們要找出 $f(\theta) = \dfrac{\sin\theta}{x}$ 在 $0 \leq \theta < \pi$ 上何處取得最大值，同時要記住 x 依賴於 θ，且 $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\theta} = \dfrac{ab\sin\theta}{x}$。

求最大值

由商法則（quotient rule），

$$f'(\theta) = \frac{x\cos\theta - \sin\theta\cdot\dfrac{ab\sin\theta}{x}}{x^2} = \frac{x^2\cos\theta - ab\sin^2\theta}{x^3}.$$

記 $c = \cos\theta$。利用 $x^2 = a^2 + b^2 - 2abc$ 及 $\sin^2\theta = 1 - c^2$，分子為

$$\begin{aligned} x^2\cos\theta - ab\sin^2\theta &= (a^2+b^2)c - 2abc^2 - ab + abc^2 \\ &= -(abc^2 - (a^2+b^2)c + ab) \\ &= -(ac-b)(bc-a) \\ &= (b-ac)(bc-a). \end{aligned}$$

? **想一想** 我們怎樣知道這個駐點是極大點，而且是唯一的駐點？

由於 $c \leq 1 < b/a$，我們有 $ac < b$，所以因子 $b - ac$ 恆為正數。此外 $x^3 > 0$。所以 $f'(\theta)$ 與 $bc - a$ 同號，即與 $\cos\theta - \dfrac{a}{b}$ 同號：

- 當 $\cos\theta > a/b$（θ 較小）時，$f'(\theta) > 0$，f 遞增；
- 當 $\cos\theta < a/b$（θ 較大）時，$f'(\theta) < 0$，f 遞減。

由於 $\cos\theta$ 在 $[0, \pi)$ 上遞減，且 $0 < a/b < 1$，在此範圍內恰好有一個 θ 使 $\cos\theta = a/b$，而 f 在此之前上升，在此之後下降。所以這給出 x 增加率的全局最大值。此時

$$x^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cdot\frac{a}{b} = b^2 - a^2,$$

所以當 $x = (b^2 - a^2)^{1/2}$ 時，x 的增加率最大，得證。

從幾何角度看，$x^2 + a^2 = b^2$ 表示三角形在 H 處是直角：當連接兩針尖端的線段與時針垂直時，增加率最大。

$b = 2a$ 的情況

此時 $\cos\theta = a/b = \frac{1}{2}$，所以最大增加率出現在 $\theta = \pi/3$ 時。

以正午後的分鐘數量度 t。分針在 60 分鐘內轉過 2π，時針則在 720 分鐘內轉過 2π，兩者都從豎直位置起順時針轉動。所以兩針之間的夾角為

$$\theta = 2\pi\left(\frac{1}{60} - \frac{1}{720}\right)t = 2\pi \cdot \frac{11}{720}\,t = \frac{11\pi}{360}\,t,$$

此式在其值小於 π 時成立。由正午時 $\theta = 0$ 開始，θ 首次到達 $\pi/3$ 的時刻滿足

$$\frac{11\pi}{360}\,t = \frac{\pi}{3} \quad\Longrightarrow\quad t = \frac{120}{11} = 10\tfrac{10}{11} \text{ 分鐘.}$$

這大約是 10.91 分鐘（10 分鐘零大約 55 秒），比 11 分鐘稍少，得證。

驗算

- 當 $\theta = 0$ 時，增加率為 0（兩針重疊，$x = b - a$ 處於最小值）；當 $\theta \to \pi$ 時，增加率再次趨向 0（此時 $x \to a + b$ 處於最大值）。所以最大值嚴格位於兩者之間，正如我們所預期。
- 取 $a = 1$、$b = 2$，逐分鐘追蹤兩針尖端的位置並估算它們之間距離的變化率，最大變化率出現在 $t \approx 10.909$ 分鐘，此時 $x \approx 1.732 = \sqrt{3} = \sqrt{b^2 - a^2}$。
- 答案略少於 11，是因為假如時針靜止不動，分針恰好需要 10 分鐘到達 60°；但時針會慢慢向前移，所以需要多一點時間。120/11 與大家熟悉的「兩針在 720/11 分鐘後再次重合」屬於同一類數字。

常見錯誤

- 求 x 本身的最大值，或者求 $\mathrm{d}x/\mathrm{d}\theta$ 的最大值時，在使用商法則那一步沒有留意 x 也依賴於 θ。
- 只用分針的速率（每分鐘 $2\pi/60$）作為 $\mathrm{d}\theta/\mathrm{d}t$，這樣會得出恰好 10 分鐘；其實兩針之間的夾角是以兩個速率的*差*增長的。
- 忘記捨去 $\cos\theta = b/a$ 這個根；由於 $b > a$，這個根是不可能的。

STEP 之外

這是一道相關變率（related rates）問題：某個量以已知速率改變，我們追蹤一個在幾何上與之相關的量如何隨之變化。同樣的想法——用隨時間均勻變化的角度來描述位置

——正是研究行星運動的起點：兩顆在圓形軌道上運行的行星之間的距離，表現與這裏的 x 完全一樣，而它們分離得最快的時刻也是用同樣方法求得。Kleppner 和 Kolenkow 的 *An Introduction to Mechanics*（《力學導論》）以向量發展這類運動學。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。