詳細解答

STEP I 2014，第 3 題

純數學 • 多項式方程與不等式

> **STEP I 2014，第 3 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/14-s1-q3

關鍵思路

兩個積分都是初等積分，所以條件不過是一條關於 a 和 b 的多項式方程。關鍵在於找出公因式 $b-a$（它不為零，所以可以約去），以及在第 (iii) 部分中，留意到剩下的式子具有足夠的對稱性，可以用和 $b+a$ 與差 $b-a$ 簡潔地表示。

解答

計算兩個積分後，條件為

$$\frac{b^3-a^3}{3}=\left(\frac{b^2-a^2}{2}\right)^2=\frac{(b-a)^2(b+a)^2}{4}. \qquad (*)$$

由於 $b^3-a^3=(b-a)(b^2+ab+a^2)$ 且 $b-a>0$，我們可以把 $(*)$ 除以 $b-a$，得到

$$4(b^2+ab+a^2)=3(b-a)(b+a)^2. \qquad (**)$$

第 (i) 部分

當 $a=0$ 時，$(**)$ 變成 $4b^2=3b^3$。由於 $b>0$，可以除以 b^2，得到

$$b=\tfrac{4}{3}.$$

第 (ii) 部分

當 $a=1$ 時，$(**)$ 變成

$$4(b^2+b+1)=3(b-1)(b+1)^2=3(b^3+b^2-b-1),$$

即 $3b^3+3b^2-3b-3-4b^2-4b-4=0$，亦即

$$3b^3-b^2-7b-7=0,$$

得證。

現設 $f(x)=3x^3-x^2-7x-7$，則

$$f'(x)=9x^2-2x-7=(9x+7)(x-1).$$

駐點（stationary point）位於 $x=-\frac{7}{9}$（局部極大值（local maximum），因為這個三次函數的首項係數為正）及 $x=1$（局部極小值（local minimum）），且

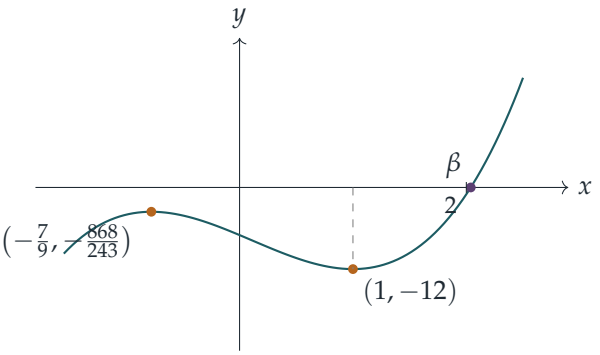
$$f(1)=3-1-7-7=-12,\qquad f\left(-\tfrac{7}{9}\right)=\frac{-343-147+1323-1701}{243}=-\frac{868}{243}.$$

想一想 知道局部極大值的數值，如何告訴我們有多少個根？

局部極大值是負數。當 $x\le 1$ 時，f 先遞增至 $x=-\frac{7}{9}$，然後遞減，所以在這範圍內 $f(x)\le f(-\frac{7}{9})<0$：沒有滿足 $x\le 1$ 的根。當 $x>1$ 時，f 嚴格遞增（f' 的兩個因式皆為正），且 $f(x)\to\infty$，所以它恰好穿過零一次。因此恰好有一個實根，而

$$f(2)=24-4-14-7=-1<0,\qquad f(3)=81-9-21-7=44>0,$$

所以由連續性（continuity）可知，這個根位於 2 與 3 之間。



草圖顯示曲線 $y=3x^3-x^2-7x-7$：兩個轉向點（turning point）都位於 x 軸下方，所以曲線只穿過 x 軸一次，位於 $\beta\approx 2.04$。

第 (iii) 部分

設 $p=b+a$ 及 $q=b-a$，則 $p^2=b^2+2ab+a^2$ 及 $q^2=b^2-2ab+a^2$，所以

$$3p^2+q^2=4b^2+4ab+4a^2=4(b^2+ab+a^2).$$

因此 $(**)$ 的左方是 $3p^2+q^2$，而右方是 $3qp^2$。所以

$$3p^2+q^2=3p^2q,$$

得證。移項得 $q^2=3p^2(q-1)$。由於 $q>0$，左方為正，所以 $q\neq 1$，且

$$p^2=\frac{q^2}{3(q-1)}.$$

至於推論部分：

- 下界（*lower bound*）。$q^2>0$ 且 $p^2>0$（因為 $p=b+a>0$），所以 $3(q-1)=q^2/p^2>0$，即 $q>1$。
- 上界（*upper bound*）。由於 $a\geq 0$，我們有 $p=q+2a\geq q>0$，所以 $p^2\geq q^2$。因此

$$\frac{q^2}{3(q-1)}\geq q^2 \iff 1\geq 3(q-1) \iff q\leq \tfrac{4}{3},$$

  其中我們除以 $q^2>0$ 並乘以 $3(q-1)>0$，兩者都不會改變不等號的方向。

因此 $1<b-a\leq \frac{4}{3}$，而等號成立若且唯若 $a=0$，這正是第 (i) 部分的情況。

驗算

- 第 (i) 部分與第 (iii) 部分吻合：$a=0$ 給出 $q=b=\frac{4}{3}$，正是範圍的上端。
- 第 (ii) 部分同樣吻合：根為 $b\approx 2.0390$，所以 $q=b-1\approx 1.039$，位於 $(1,\frac{4}{3}]$ 之內。在 $[1,2.0390]$ 上計算兩個積分，得到的數值相等（約為 2.4924），而且準確至多個小數位。
- 反過來，$(1,\frac{4}{3}]$ 中任何 q 都給出 $p=q/\sqrt{3(q-1)}\geq q$，從而得到合法的 $a=\frac{1}{2}(p-q)\geq 0$；所以這個界是最佳的（sharp）。

常見錯誤

- 在第 (ii) 部分忘記約去 $b-a$，結果得到一條帶有多餘根 $b=1$ 的四次方程。
- 只證明 $f(2)<0<f(3)$：這只證明了在 $(2,3)$ 內有一個根，卻沒有證明它是唯一的實根。你還需要考慮轉向點。
- 在第 (iii) 部分，未確立 $q-1>0$ 便把不等式除以 $q-1$。

STEP 之外

積分形式的柯西－施瓦茨不等式（Cauchy–Schwarz inequality）給出 $\left(\int_a^b x\,\mathrm{d}x\right)^2 \leq (b-a)\int_a^b x^2\,\mathrm{d}x$，等號只在被積函數 x 為常數時成立，而它並非常數。結合題目給定的條件，這表示 $\int_a^b x^2\,\mathrm{d}x < (b-a)\int_a^b x^2\,\mathrm{d}x$，所以 $b-a > 1$：一行便得出第 (iii) 部分的下界。柯西－施瓦茨不等式有多種形式，是大學一年級分析學中最常用的工具之一；Bartle 和 Sherbert 的 *Introduction to Real Analysis*（《實分析導論》）細緻地建立了黎曼積分（Riemann integral）以及類似這樣的不等式。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。