詳細解答

STEP I 2014，第 2 題

純數學 • 對數函數的積分

> **STEP I 2014，第 2 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/14-s1-q2

關鍵思路

一切都建基於因式分解（factorising）$x^2-4=(x-2)(x+2)$，這樣二次式的對數（logarithm）便可拆成 $\ln(2-x)+\ln(2+x)$，而這兩部分都可以用第 (i) 部分（及其鏡像）的結果即時積分。至於絕對值（modulus）符號，只是要求我們留意 $\ln|x^2-4|$ 在哪裏為正、在哪裏為負，而第 (ii) 部分的草圖正好顯示了這一點。

解答

第 (i) 部分

當 $x<2$ 時，$2-x>0$，因此所有式子都有定義。我們對右方求導，並對 $-(2-x)\ln(2-x)$ 使用乘積法則（product rule）。$-(2-x)$ 的導數（derivative）是 1，而根據鏈式法則（chain rule），$\ln(2-x)$ 的導數是 $-\frac{1}{2-x}$。所以

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\Big[-(2-x)\ln(2-x)+(2-x)\Big] &= 1\cdot\ln(2-x)-(2-x)\cdot\left(-\frac{1}{2-x}\right)-1\\ &= \ln(2-x)+1-1=\ln(2-x),\end{aligned}$$

可見題中所給的原函數（antiderivative）正確。

（另一做法是代換（substitution）$u=2-x$，並利用 $\int \ln u\,\mathrm{d}u = u\ln u-u$。）

同理，當 $x>-2$ 時，

$$\int \ln(2+x)\,\mathrm{d}x=(2+x)\ln(2+x)-(2+x)+c,$$

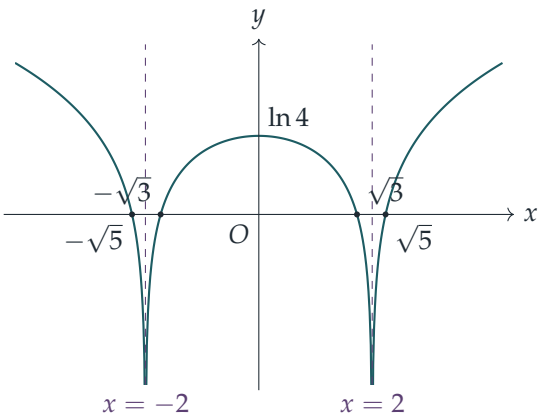
這個結果稍後亦會用到。

第 (ii) 部分

設 $f(x) = \ln|x^2 - 4|$，其定義域為 $x \neq \pm 2$。由於 $f(-x) = f(x)$，曲線關於 y 軸對稱（symmetric）。

- 當 $|x| < 2$ 時：$f(x) = \ln(4 - x^2)$，在 $x = 0$ 取得最大值，此時 $y = \ln 4$。當 $4 - x^2 = 1$，即 $x = \pm\sqrt{3}$ 時，函數值為零；當 $x \to \pm 2$ 時，函數趨向 $-\infty$。
- 當 $|x| > 2$ 時：$f(x) = \ln(x^2 - 4)$，在 $x = \pm 2$ 附近由 $-\infty$ 上升，在 $x^2 - 4 = 1$，即 $x = \pm\sqrt{5}$ 處與軸相交，之後緩慢增長，增長方式類似 $2\ln|x|$。

直線 $x = \pm 2$ 是鉛垂漸近線（vertical asymptote）。



第 (iii) 部分

由正 x 軸、y 軸及 A 所圍成的有限區域，就是 $x = 0$ 與 $x = \sqrt{3}$ 之間的拱形部分，在此範圍內 $y = \ln(4 - x^2) \geq 0$。其面積為

$$\int_0^{\sqrt{3}} \ln(4 - x^2)\,\mathrm{d}x = \int_0^{\sqrt{3}} \ln(2 - x)\,\mathrm{d}x + \int_0^{\sqrt{3}} \ln(2 + x)\,\mathrm{d}x,$$

這裏用了 $\ln(4 - x^2) = \ln(2 - x) + \ln(2 + x)$；由於兩個因式在此範圍內皆為正，等式成立。根據第 (i) 部分，

$$\begin{aligned}\int_0^{\sqrt{3}} \ln(2 - x)\,\mathrm{d}x &= \Big[-(2 - x)\ln(2 - x) + (2 - x)\Big]_0^{\sqrt{3}} \\ &= -(2 - \sqrt{3})\ln(2 - \sqrt{3}) + (2 - \sqrt{3}) + 2\ln 2 - 2 \\ &= -(2 - \sqrt{3})\ln(2 - \sqrt{3}) - \sqrt{3} + 2\ln 2,\end{aligned}$$

以及

$$\begin{aligned}\int_0^{\sqrt{3}} \ln(2+x)\,\mathrm{d}x &= \Big[(2+x)\ln(2+x)-(2+x)\Big]_0^{\sqrt{3}}\\ &= (2+\sqrt{3})\ln(2+\sqrt{3})-(2+\sqrt{3})-2\ln 2+2\\ &= (2+\sqrt{3})\ln(2+\sqrt{3})-\sqrt{3}-2\ln 2.\end{aligned}$$

想一想 怎樣把 $\ln(2-\sqrt{3})$ 與 $\ln(2+\sqrt{3})$ 合併？

由於 $(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})=4-3=1$，所以 $\ln(2-\sqrt{3})=-\ln(2+\sqrt{3})$。把兩個積分相加，$\ln 2$ 項互相抵消，得

$$\begin{aligned}\int_0^{\sqrt{3}} \ln(4-x^2)\,\mathrm{d}x &= (2-\sqrt{3})\ln(2+\sqrt{3})+(2+\sqrt{3})\ln(2+\sqrt{3})-2\sqrt{3}\\ &= 4\ln(2+\sqrt{3})-2\sqrt{3},\end{aligned}$$

正如所求。

第 (iv) 部分

在 $|x|<2$ 的範圍內，B 就是 A 在兩條漸近線之間的部分，並把位於軸下方的部分向上反射。由草圖可見，當 $|x|\le\sqrt{3}$ 時 $\ln(4-x^2)\ge 0$，而當 $\sqrt{3}<|x|<2$ 時 $\ln(4-x^2)<0$。利用對稱性，所求面積為

$$2\left[\int_0^{\sqrt{3}} \ln(4-x^2)\,\mathrm{d}x-\int_{\sqrt{3}}^{2} \ln(4-x^2)\,\mathrm{d}x\right].$$

第二個積分是反常積分，因為被積函數在 $x=2$ 處趨向 $-\infty$。我們先積分至 $x=2-\varepsilon$，再令 $\varepsilon\to 0^+$。在第 (i) 部分 $\ln(2-x)$ 的原函數中，代入 $x=2-\varepsilon$ 得

$$-\varepsilon\ln\varepsilon+\varepsilon\to 0,$$

這是根據題中所給「當 $t\to 0$ 時 $t\ln t\to 0$」這一事實。因此上限在該處的貢獻為 0，於是

$$\begin{aligned}\int_{\sqrt{3}}^{2} \ln(2-x)\,\mathrm{d}x &= 0-\Big[-(2-\sqrt{3})\ln(2-\sqrt{3})+(2-\sqrt{3})\Big]\\ &= -(2-\sqrt{3})\ln(2+\sqrt{3})-2+\sqrt{3},\end{aligned}$$

這裏再次用了 $\ln(2-\sqrt{3})=-\ln(2+\sqrt{3})$。另一部分是普通積分：

$$\begin{aligned}\int_{\sqrt{3}}^{2} \ln(2+x)\,\mathrm{d}x &= (4\ln 4-4)-\Big[(2+\sqrt{3})\ln(2+\sqrt{3})-(2+\sqrt{3})\Big]\\ &= 8\ln 2-2+\sqrt{3}-(2+\sqrt{3})\ln(2+\sqrt{3}).\end{aligned}$$

相加，得

$$\int_{\sqrt{3}}^{2} \ln(4-x^2)\,\mathrm{d}x = 8\ln 2 - 4 + 2\sqrt{3} - 4\ln(2+\sqrt{3}),$$

其值約為 -0.259：是負數，與預期相符。因此面積為

$$\begin{aligned} &2\Big[\big(4\ln(2+\sqrt{3}) - 2\sqrt{3}\big) - \big(8\ln 2 - 4 + 2\sqrt{3} - 4\ln(2+\sqrt{3})\big)\Big] \\ &\quad = 16\ln(2+\sqrt{3}) - 16\ln 2 + 8 - 8\sqrt{3} \\ &\quad = 16\ln\Big(\frac{2+\sqrt{3}}{2}\Big) + 8 - 8\sqrt{3} \approx 4.125. \end{aligned}$$

驗算

- 把 $[0,\sqrt{3}]$ 與 $[\sqrt{3},2]$ 上的兩個積分相加，得 $\int_0^2 \ln(4-x^2)\,\mathrm{d}x = 8\ln 2 - 4 \approx 1.545$。這個結果亦可直接由第 (i) 部分一行得出，因為在 $x = 0$ 處，兩個原函數分別給出 $-2\ln 2 + 2$ 和 $2\ln 2 - 2$，兩者互相抵消。
- 第 (iii) 部分的面積是 $4\ln(2+\sqrt{3}) - 2\sqrt{3} \approx 1.804$。這比包圍該拱形的長方形面積 $\sqrt{3} \times \ln 4 \approx 2.40$ 小，理應如此。
- 對 $\big|\ln|x^2-4|\big|$ 在 $(-2,2)$ 上進行數值積分（numerical integration），得 4.1246，與 $16\ln\big(\frac{2+\sqrt{3}}{2}\big) + 8 - 8\sqrt{3} = 4.12457\ldots$ 吻合。

常見錯誤

- 忘記曲線在 $x = \sqrt{3}$ 與 $x = 2$ 之間的部分位於軸下方，因而把有向積分加上去，而不是減去。
- 沒有把 $\ln(2-\sqrt{3})$ 合併：正是恆等式 $(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3}) = 1$ 令答案變得簡潔。
- 不加說明便直接把 $x = 2$ 代入 $(2-x)\ln(2-x)$：該式在此處並無定義，真正支持取值為 0 的，是極限（limit）$t\ln t \to 0$。

STEP 之外

第 (iv) 部分的積分是一個*反常積分*（improper integral）：被積函數無界，但面積仍然有限，因為對數爆增得極慢，以致 $t\ln t \to 0$。到了大學，你會把這一點嚴謹化，準確判斷對於無界的 g，$\int_0^1 g(t)\,\mathrm{d}t$ 何時收斂（converges）（例如，$\int_0^1 t^{-p}\,\mathrm{d}t$ 收斂當且僅當 $p < 1$）。Abbott 的 *Understanding Analysis*（《理解分析》）對 $t\ln t \to 0$ 這類極限以及積分的定義都有細緻的討論。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。