詳細解答

STEP I 2014，第 12 題

概率與統計 • 離散隨機變量

> **STEP I 2014，第 12 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/14-s1-q12

關鍵思路

平方可以消去絕對值（modulus）符號，因此 $\mathrm{E}(X^2)$ 只需要用到骰子點數 S 的 $\mathrm{E}(S)$ 和 $\mathrm{E}(S^2)$，再對硬幣的兩種結果取平均。整數條件隨即化為一個關於 $(k-1)^2$ 的整除（divisibility）問題，於是只剩下極少數個位數候選值。一旦知道 k，X 只取五個值，而兩輪遊戲只需簡短地枚舉（enumeration）所有數對。

解答

求 $\mathrm{E}(X^2)$

設 S 為骰子顯示的點數，則

$$\mathrm{P}(S=1)=\tfrac{1}{2},\qquad \mathrm{P}(S=2)=\tfrac{1}{3},\qquad \mathrm{P}(S=3)=\tfrac{1}{6}.$$

於是

$$\mathrm{E}(S)=\tfrac{1}{2}+\tfrac{2}{3}+\tfrac{3}{6}=\tfrac{5}{3},\qquad \mathrm{E}(S^2)=\tfrac{1}{2}+\tfrac{4}{3}+\tfrac{9}{6}=\tfrac{10}{3}.$$

硬幣是公平（fair）的，且與骰子獨立（independent）。由於 $|a|^2=a^2$，在擲得正面的條件下 $X^2=(kS-1)^2$，在擲得反面的條件下 $X^2=(k-S)^2$。所以

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(X^2)&=\tfrac{1}{2}\,\mathrm{E}[(kS-1)^2]+\tfrac{1}{2}\,\mathrm{E}[(k-S)^2]\\&=\tfrac{1}{2}[k^2\mathrm{E}(S^2)-2k\mathrm{E}(S)+1]+\tfrac{1}{2}[k^2-2k\mathrm{E}(S)+\mathrm{E}(S^2)]\\&=\tfrac{1}{2}\left[\tfrac{10}{3}k^2-\tfrac{10}{3}k+1+k^2-\tfrac{10}{3}k+\tfrac{10}{3}\right]\\&=\frac{13k^2-20k+13}{6}.\end{aligned}$$

另一方面，

$$k + \frac{13(k-1)^2}{6} = \frac{6k + 13k^2 - 26k + 13}{6} = \frac{13k^2 - 20k + 13}{6},$$

所以 $\mathrm{E}(X^2) = k + \frac{13}{6}(k-1)^2$，正如所求。

求 k

由於 k 是整數，$\mathrm{E}(X^2)$ 是整數若且唯若 6 整除 $13(k-1)^2$。因為 13 與 6 互質（coprime），這等同於 $6 \mid (k-1)^2$，即 2 和 3 都整除 $(k-1)^2$。由於 2 和 3 是質數（prime），它們各自必須整除 $k-1$ 本身，所以 $6 \mid k-1$。在 $1 \le k \le 9$ 的範圍內，只剩下 $k = 1$ 或 $k = 7$。

> **想一想** 兩個候選值都令 $\mathrm{E}(X^2)$ 為整數。哪個條件排除了其中一個？

是關於 $\mathrm{E}(X)$ 的條件。若 $k = 1$，兩條規則都給出 $X = |S - 1| = S - 1$，所以 $\mathrm{E}(X) = \frac{5}{3} - 1 = \frac{2}{3}$，並非整數。

若 $k = 7$，則對每一面都有 $7S - 1 > 0$ 及 $7 - S > 0$，因此可以去掉絕對值符號：

$$\mathrm{E}(X) = \tfrac{1}{2}(7 \cdot \tfrac{5}{3} - 1) + \tfrac{1}{2}(7 - \tfrac{5}{3}) = \tfrac{16}{3} + \tfrac{8}{3} = 8,$$

而 $\mathrm{E}(X^2) = 7 + \frac{13}{6} \cdot 36 = 85$。兩者都是正整數，所以 $k = 7$。

X 的分佈

當 $k = 7$ 時，正面給出 $X = 7S - 1 \in \{6, 13, 20\}$，反面給出 $X = 7 - S \in \{6, 5, 4\}$。每個（硬幣，骰子）組合的概率為 $\frac{1}{2}\mathrm{P}(S = s)$，而數值 6 既來自正面且 $S = 1$，也來自反面且 $S = 1$：

x	4	5	6	13	20
$\mathrm{P}(X = x)$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{12}$

各概率之和為 1。

兩輪遊戲

設 X_1、X_2 為兩輪的結果。由於每一輪都重新擲骰子和硬幣，它們互相獨立，且各自服從上述分佈（distribution）。我們需要找出和大於 25 及和恰好等於 25 的數對。

> **想一想** 怎樣才能不遺漏地列出總和大於 25 的所有數對？

按較大的值分類。若兩個結果都不是 20，最大可能總和為 $13 + 13 = 26$，而 $13 + 6 = 19$ 已經太小，所以 $(13, 13)$ 是唯一這樣的數對。若其中一個結果是 20，另一個必須大於 5，

即為 6、13 或 20；若它等於 5，總和恰好是 25。因此

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(X_1+X_2>25) &= \mathrm{P}(13,13)+2\,\mathrm{P}(20,6)+2\,\mathrm{P}(20,13)+\mathrm{P}(20,20)\\ &= \tfrac{1}{36}+2\cdot\tfrac{1}{12}\cdot\tfrac{1}{2}+2\cdot\tfrac{1}{12}\cdot\tfrac{1}{6}+\tfrac{1}{144}\\ &= \frac{4+12+4+1}{144}=\frac{7}{48},\end{aligned}$$

其中因子 2 計算兩種次序。同理

$$\mathrm{P}(X_1+X_2=25)=2\,\mathrm{P}(20,5)=2\cdot\tfrac{1}{12}\cdot\tfrac{1}{6}=\tfrac{1}{36}.$$

所以賭客預期獲付的金額（以英鎊計）為

$$\frac{7w}{48}+\frac{1}{36}.$$

當這個金額少於 £1 的賭注時，遊戲對賭場有利：

$$\frac{7w}{48}+\frac{1}{36}<1 \iff \frac{7w}{48}<\frac{35}{36} \iff w<\frac{35\cdot 48}{36\cdot 7}=\frac{20}{3}.$$

由於 w 是整數，最大可能值為 $w=6$。又因為 $\frac{20}{3}$ 不是整數，無論是否容許公平遊戲（預期獲付恰好 £1），答案都相同。

驗算

- 由表可得 $\mathrm{E}(X)=\frac{4+10+36+26+20}{12}=8$ 及 $\mathrm{E}(X^2)=\frac{16+50+216+338+400}{12}=85$，與公式吻合。
- 當 $w=6$ 時，預期獲付為 $\frac{7}{8}+\frac{1}{36}=\frac{65}{72}\approx$ £0.90，低於賭注；當 $w=7$ 時為 $\frac{151}{144}\approx$ £1.05，高於賭注。
- 以電腦模擬 2×10^5 局兩輪遊戲，約 14.5% 的局總和大於 25（$\frac{7}{48}\approx 14.6\%$），約 2.8% 的局總和恰好是 25（$\frac{1}{36}\approx 2.8\%$）。

常見錯誤

- 在分佈中把 $X=6$ 列出兩次，一次對應正面、一次對應反面，而沒有把它們合併為 $\mathrm{P}(X=6)=\frac{1}{2}$。
- 對於像 $(20,6)$ 這樣兩數不相等的數對，忘記乘以代表兩種次序的因子 2。
- 把「總和等於 25」當作贏得 £w 或當作輸：賭客只是取回賭注。

STEP 之外

計算 $\mathrm{E}(X^2)$ 的過程是全期望定律（law of total expectation）$\mathrm{E}(Y) = \sum_i \mathrm{P}(A_i)\,\mathrm{E}(Y \mid A_i)$ 的一個例子，大學一年級的概率課程經常用到它。兩輪遊戲涉及獨立隨機變量（random variables）之和的分佈，即卷積（convolution），而生成函數（generating functions）可以簡潔地處理這類問題。Grimmett 和 Welsh 的 *Probability: An Introduction*（《概率導論》）涵蓋了這兩個概念。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。