詳細解答

STEP I 2014，第 11 題

力學 • 連接滑輪系統

STEP I 2014，第 11 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

step.maths.org/questions/14-s1-q11

關鍵思路

對每個質點寫出牛頓第二定律（Newton's second law），每條繩各用一個張力（tension），再由繩的約束條件（constraint）得出所有質點的加速度。在系統 II 中，關鍵在於滑輪（pulley）P_1 是輕的（light）：作用於它的合力必須為零（否則它的加速度會是無限大），所以上面那條繩的張力恰好是下面那條的兩倍。確立了這一點之後，P_1 連同其下的兩個質點對 M 的作用，就跟單一個質量為 4μ 的質點完全一樣。

解答

全題中，質點視為點質量（point mass），繩視為輕而不可伸長（inextensible），滑輪視為光滑（smooth）且輕，因此每條繩上各處的張力相同。

第 (i) 部分

設繩的張力為 T。由於繩不可伸長，若 M 以 a_1 向下加速，則 m 以 a_1 向上加速。對每個質點應用牛頓第二定律，並以運動方向為正方向，得

$$\begin{aligned} M: &\quad Mg - T = Ma_1, \\ m: &\quad T - mg = ma_1. \end{aligned}$$

兩式相加，得 $(M-m)g = (M+m)a_1$，所以

$$a_1 = \frac{M-m}{M+m}\,g,$$

得證。代回 m 的方程，

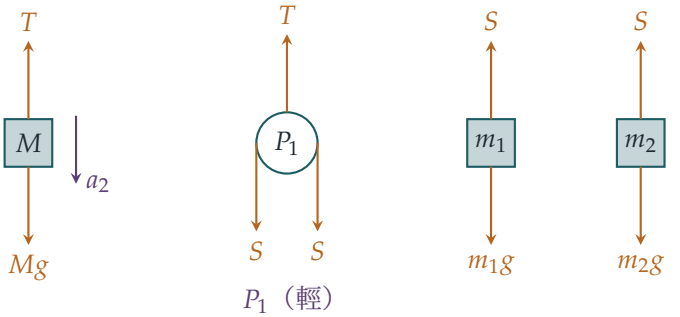
$$T = m(g+a_1) = m\cdot\frac{2M}{M+m}\,g = \frac{2Mmg}{M+m}.$$

繩的兩段直線部分都從滑輪鉛垂向下伸出，各以張力 T 拉動滑輪，所以張力對滑輪的作用力為

$$2T = \frac{4Mmg}{M+m} \quad \text{，方向鉛垂向下。}$$

第 (ii) 部分

設跨過固定滑輪 P 的繩的張力為 T，跨過 P_1 的繩的張力為 S。



輕滑輪。 作用於 P_1 的力是向上的 T 和向下的 $2S$（它本身的重量為零）。由於它的質量為零，$T - 2S = 0 \cdot (\text{加速度}) = 0$，所以

$$T = 2S.$$

> **想一想** m_1 和 m_2 的加速度與 M 的加速度有甚麼關係？

上面那條繩不可伸長，所以若 M 以 a_2 向下加速，則 P_1 以 a_2 向上加速。下面那條繩只決定 m_1 和 m_2 相對於 P_1 的運動：若 m_1 相對於 P_1 以 b 向下加速，則 m_2 相對於 P_1 以 b 向上加速。再加上 P_1 本身的運動，實際的加速度為

$$m_1 : \ b - a_2 \ \text{，向下，} \qquad m_2 : \ b + a_2 \ \text{，向上.}$$

這裏 b 是第二個未知量，稍後會把它消去。

運動方程。

$$\begin{aligned} M: &\quad Mg - 2S = Ma_2, \\ m_1: &\quad m_1 g - S = m_1(b - a_2), \\ m_2: &\quad S - m_2 g = m_2(b + a_2). \end{aligned}$$

把 m_1 的方程除以 m_1，m_2 的方程除以 m_2：

$$g - \frac{S}{m_1} + a_2 = b = \frac{S}{m_2} - g - a_2.$$

因此

$$2(g+a_2) = S\left(\frac{1}{m_1}+\frac{1}{m_2}\right) = S\,\frac{m_1+m_2}{m_1m_2} = \frac{S}{\mu},$$

所以 $S = 2\mu(g+a_2)$，而 $T = 2S = 4\mu(g+a_2)$。代入 M 的方程，

$$Mg - 4\mu g - 4\mu a_2 = Ma_2 \quad\Longrightarrow\quad (M+4\mu)a_2 = (M-4\mu)g,$$

因此

$$a_2 = \frac{M-4\mu}{M+4\mu}\,g,$$

得證。與第 (i) 部分比較：M 的表現跟它與單一個質量為 4μ 的質點懸掛在一起時完全相同。

a_1 與 a_2 何時相等？ 對 $x>0$ 設 $f(x) = \dfrac{M-x}{M+x}$，於是 $a_1 = f(m)\,g$，$a_2 = f(4\mu)\,g$。由於

$$f(x) = \frac{2M}{M+x} - 1$$

且 $M>0$，f 在 $x>0$ 上嚴格遞減（strictly decreasing），因此是一對一（one-to-one）的。所以 $a_1 = a_2$ 當且僅當 $m = 4\mu$。由 $m = m_1+m_2$，這變成

$$m_1+m_2 = \frac{4m_1m_2}{m_1+m_2} \iff (m_1+m_2)^2 = 4m_1m_2 \iff (m_1-m_2)^2 = 0 \iff m_1 = m_2,$$

其中第一步是乘以 $m_1+m_2>0$，這一步是可逆的。這樣便完成了雙向的證明。

驗算

- 若 $m_1 = m_2$，系統 II 的下半部分平衡，所以 $b=0$：P_1 及其下的質點作為一個質量為 m_1+m_2 的整體運動，系統 II 便化為系統 I。這與此情況下 $4\mu = m_1+m_2$ 相符。
- 若 $m_2 \to 0$，則 $\mu \to 0$ 且 $a_2 \to g$：沒有重物牽制 M，因為 m_1 只是自由下落，不承受張力。合理。
- 第 (ii) 部分的張力 $T = 4\mu(g+a_2)$ 也可以從第 (i) 部分得出：若 P_1 固定不動，作用於它的力為 $4m_1m_2g/(m_1+m_2) = 4\mu g$。以 a_2 向上加速，只是把 g 換成 $g+a_2$。
- 數值上，取 $M=3$、$m_1=1$、$m_2=2$，得 $\mu = \frac{2}{3}$ 及 $a_2 = \frac{1}{17}g \approx 0.576\ \mathrm{m\,s^{-2}}$（取 $g = 9.8\ \mathrm{m\,s^{-2}}$）。直接解四條方程也得出相同的值。

常見錯誤

- 忘記 P_1 會移動，把 m_1 和 m_2 的加速度寫成 $\pm b$，而不是 $b-a_2$ 和 $b+a_2$。

- 在輕滑輪兩邊使用 $T = S$。P_1 每一邊都以 S 向下拉，所以它上方的繩必須承受 $2S$。
- 推出 $a_1 = a_2 \Rightarrow m = 4\mu$ 卻沒有說明理由：這需要 f 是一對一的。

STEP 之外

這個裝置是阿特伍德機（Atwood machine）之中再套一部阿特伍德機，而 $\mu = m_1 m_2/(m_1 + m_2)$ 就是約化質量（reduced mass）——當把行星與其恆星這類二體問題（two-body problem）化為單體問題時，出現的正是同一個量。帶有這類約束的系統，用拉格朗日力學（Lagrangian mechanics）處理最為簡潔：它直接使用獨立坐標（這裏是 P_1 的高度，以及 m_1 相對於 P_1 的位置），完全不需要求張力。Kleppner 與 Kolenkow 的 *An Introduction to Mechanics*（《力學導論》）仔細講解了滑輪系統，並進而討論二體問題中的約化質量。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。