詳細解答

STEP I 2014，第 10 題

力學 • 碰撞與恢復係數

STEP I 2014，第 10 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

step.maths.org/questions/14-s1-q10

關鍵思路

兩部分的做法都一樣：自由飛行階段用能量守恆（conservation of energy），每次碰撞則用牛頓實驗定律（Newton's experimental law）。第 (ii) 部分的竅門在於留意到：兩球相撞的一刻，大球剛剛反向，而小球仍以全速下落。兩者以很大的接近速率（closing speed）相遇，於是較重的下方球可以把較輕的上方球拋到遠高於起始位置的高度。之後就只是一道含兩條方程的碰撞題，而題目給出的數值令速率之比算得乾淨利落。

解答

把兩球都模型化為沿鉛垂方向運動的均勻剛體球（uniform rigid sphere），不計空氣阻力，並以 g 表示重力加速度。每次碰撞都是瞬時的，所以碰撞期間重力不會改變任何動量（momentum）。

第 (i) 部分

當球心位於高度 R 時，球便接觸地面，因此球已下落了距離 H。由能量守恆，球在碰撞前一刻的速率為

$$u = \sqrt{2gH}.$$

地面固定不動，所以由牛頓實驗定律，反彈速率為向上的 eu。之後球上升至速率為零；再次由能量守恆，球再上升

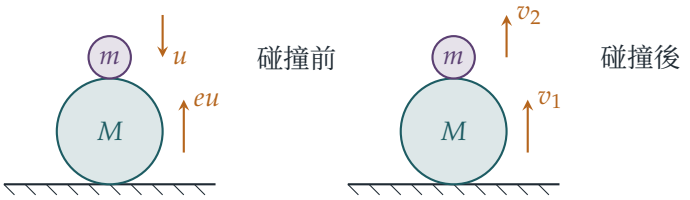
$$\frac{(eu)^2}{2g} = \frac{e^2 \cdot 2gH}{2g} = e^2 H.$$

球心在這段上升開始時位於高度 R，所以它到達離地高度 $R + He^2$，即為所求。

第 (ii) 部分

兩球一同由靜止開始自由下落，所以在每一時刻速率都相同。下方球的球心下落 H 後到達地面，因此在那一刻兩球都以 $u = \sqrt{2gH}$ 向下運動。下方球反彈，如第 (i) 部分一樣以向上速率 eu 離開地面；緊接着它與仍以 u 向下運動的上方球相撞。

取向上為正，並設兩球相撞後一刻的速度分別為 v_1（質量 M 的球）和 v_2（質量 m 的球）。



由動量守恆（conservation of momentum）得

$$Meu - mu = Mv_1 + mv_2,$$

而由牛頓實驗定律（分離速率（speed of separation）等於 e 乘以接近速率（speed of approach），其中接近速率為 $eu + u$）得

$$v_2 - v_1 = e(1 + e)u.$$

把 $v_1 = v_2 - e(1 + e)u$ 代入動量方程，

$$\begin{aligned}(M + m)v_2 &= Meu - mu + Me(1 + e)u \\ &= (Me(2 + e) - m)u,\end{aligned}$$

因此

$$v_2 = \frac{Me(2 + e) - m}{M + m}\,u.$$

想一想 兩球相撞時，小球的球心在哪裏？

碰撞緊接在反彈之後發生，所以大球仍然接觸地面：其球心位於高度 R，頂部位於 $2R$，而小球的球心位於 $2R + r$。小球由該處再上升 $v_2^2/(2g)$，因此

$$h = 2R + r + \frac{v_2^2}{2g}.$$

代入題目給出的數值，$2R + r = 0.45$，所以 $v_2^2/(2g) = 4.05$；又 $u^2/(2g) = H = 1.8$。兩式相除，

$$\frac{v_2^2}{u^2} = \frac{4.05}{1.8} = \frac{9}{4}, \qquad \text{所以} \qquad v_2 = \tfrac{3}{2}u,$$

這裏取正根，因為小球在碰撞後向上運動。

當 $e=\frac{2}{3}$ 時，$e(2+e)=\frac{2}{3}\cdot\frac{8}{3}=\frac{16}{9}$。設 $k=M/m$，並把分子和分母同除以 m，

$$\frac{\frac{16}{9}k-1}{k+1}=\frac{3}{2}\implies \tfrac{32}{9}k-2=3k+3\implies \tfrac{5}{9}k=5,$$

因此

$$\frac{M}{m}=9.$$

驗算

- 當 $M/m=9$ 時，得 $v_2=\frac{3}{2}u$ 及 $v_1=v_2-\frac{10}{9}u=\frac{7}{18}u$。碰撞前的動量為 $9m\cdot\frac{2}{3}u-mu=5mu$，碰撞後為 $9m\cdot\frac{7}{18}u+m\cdot\frac{3}{2}u=5mu$。兩者相符。
- 由於 $v_1<v_2$，兩球在碰撞後分離，這是必然的。
- 以數值計算，$u=\sqrt{2\times 9.8\times 1.8}\approx 5.94\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ 及 $v_2\approx 8.91\,\mathrm{m\,s^{-1}}$，以此速率可上升 $4.05\,\mathrm{m}$，得 $h=4.5$。
- 若 $M\gg m$，則 $v_2\to e(2+e)u$；當 $e=1$ 時為 $3u$，這正是完全彈性「疊球」下落中著名的高度九倍因子。

常見錯誤

- 只以 $v_2^2/(2g)$ 作為離地的最終高度，忘記碰撞發生時小球的球心位於 $2R+r$。
- 以 $e\cdot 2u$ 或 eu 作為分離速率：接近速率是 $eu+u$，因為兩球正相向運動。
- 正負號錯誤：應固定向上為正，並把上方球在碰撞前的速度記為 $-u$。

STEP 之外

疊球下落是一個很好的示範，展示動量如何被「集中」傳到一件較輕的物體上：若把多個球疊成一座塔，每個都比下面的一個輕，最頂的球可被拋到釋放高度的許多倍。分析這類碰撞最簡潔的方法是使用零動量參考系（zero-momentum frame，即質心參考系（centre-of-mass frame）），在這參考系中，每個球的速度只是反向並乘以 e。Kleppner 與 Kolenkow 的 *An Introduction to Mechanics*（《力學導論》）對碰撞及質心參考系有細緻的闡述。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。