詳細解答

STEP I 2014，第 1 題

純數學 • 平方差

> **STEP I 2014，第 1 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/14-s1-q1

關鍵思路

一切都建基於一個因式分解（factorisation）：$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$。把 n 寫成兩個平方數之差（difference of two squares），等同於把它寫成 $n = de$，其中 $d = a - b$、$e = a + b$；由於 d 與 e 相差偶數 $2b$，兩者的奇偶性（parity）必須相同。看清這一點之後，每一部分都會變成關於奇偶性相同的因數對（factor pair）的問題。

解答

全文中，a 與 b 均為非負整數。若 $n = a^2 - b^2$ 且 $n \geq 1$，則 $a > b$，因此我們總可以把一種寫法記作 (a, b)，其中 $a > b \geq 0$。

第 (i) 部分

$$3 = 2^2 - 1^2, \quad 5 = 3^2 - 2^2, \quad 8 = 3^2 - 1^2, \quad 12 = 4^2 - 2^2, \quad 16 = 5^2 - 3^2.$$

（對於 16，顯而易見的 $4^2 - 0^2$ 並不符合要求，因為平方數必須非零。）

第 (ii) 部分

相鄰平方數之差是奇數：$(m+1)^2 - m^2 = 2m + 1$。因此任何奇數 $2m + 1$（其中 $m \geq 0$）都可寫成

$$2m + 1 = (m+1)^2 - m^2.$$

第 (iii) 部分

相隔二的平方數之差是 4 的倍數：$(k+1)^2-(k-1)^2=4k$。當 $k\geq 1$ 時，$k+1$ 與 $k-1$ 均為非負，所以

$$4k=(k+1)^2-(k-1)^2.$$

當 $k=0$ 時，直接有 $0=0^2-0^2$（或 1^2-1^2）。

第 (iv) 部分

每個平方數除以 4 的餘數都是 0 或 1：$(2m)^2=4m^2$ 及 $(2m+1)^2=4(m^2+m)+1$。因此 a^2-b^2 的餘數為

$$0-0=0,\quad 1-1=0,\quad 1-0=1\quad 或\quad 0-1\equiv 3\pmod 4,$$

而永遠不會是 2。因此沒有任何形如 $4k+2$ 的數是兩個平方數之差。

（等價地說：若 $(a-b)(a+b)=4k+2$，則 $a-b$ 與 $a+b$ 的奇偶性相同。兩者皆奇，乘積便是奇數；兩者皆偶，乘積便可被 4 整除。兩種情況都不會得到 $4k+2$。）

第 (v) 部分

設 $pq=a^2-b^2=(a-b)(a+b)$，其中 $a>b\geq 0$。令 $d=a-b$、$e=a+b$。那麼 d 與 e 是正整數，且 $d\leq e$、$de=pq$。反之，任何滿足 $d\leq e$ 且 d、e 奇偶性相同的分解 $pq=de$，都恰好給出一種寫法，即

$$a=\frac{e+d}{2},\qquad b=\frac{e-d}{2},$$

而它們都是非負整數。所以 pq 的各種寫法與這類因數對 (d,e) 一一對應（one-to-one correspondence）。

想一想 為甚麼這裏的 d 與 e 總是奇偶性相同？又為甚麼只有兩對？

由於 p 與 q 是奇質數（odd prime），pq 是奇數，所以 pq 的每個因數（divisor）都是奇數，奇偶條件自動成立。取 $p\leq q$。根據唯一分解定理（unique factorisation），滿足 $d\leq e$ 的因數對只有

$$(d,e)=(1,pq)\qquad 及\qquad (d,e)=(p,q).$$

（當 $p=q$ 時這仍然成立：p^2 的因數是 1、p 及 p^2。）由此得到

$$pq=\left(\frac{pq+1}{2}\right)^2-\left(\frac{pq-1}{2}\right)^2\qquad 及\qquad pq=\left(\frac{p+q}{2}\right)^2-\left(\frac{q-p}{2}\right)^2.$$

這兩種寫法是不同的，因為它們的 $d = a - b$ 值分別是 1 和 p，而 $p \geq 3$。所以 pq 恰好有兩種方法寫成兩個平方數之差。例如 $15 = 8^2 - 7^2 = 4^2 - 1^2$。當 $p = q$ 時，第二種寫法是 $p^2 - 0^2$，這在此處是容許的，因為只有第 (i) 部分要求平方數非零。

當 $q = 2$ 時，結果不成立。此時 $pq = 2p$，其中 p 是奇數，設 $p = 2m + 1$，則 $2p = 4m + 2$。根據第 (iv) 部分，$2p$ 根本無法以任何方式寫成兩個平方數之差。（因數對 $(1, 2p)$ 與 $(2, p)$ 都是一奇一偶。）

第 (vi) 部分

與第 (v) 部分一樣，675 的各種寫法對應於滿足 $d \leq e$ 且 d、e 奇偶性相同的因數對 $675 = de$。由於 675 是奇數，它的所有因數都是奇數，所以每個因數對都算數。

現在 $675 = 27 \times 25 = 3^3 \times 5^2$，它有 $(3+1)(2+1) = 12$ 個因數。這些因數按 $d \leftrightarrow 675/d$ 兩兩配對，而且沒有因數與自己配對，因為 675 不是完全平方數（perfect square）（$26^2 = 676$）。所以共有 $12/2 = 6$ 對：

(d, e)	$(1, 675)$	$(3, 225)$	$(5, 135)$	$(9, 75)$	$(15, 45)$	$(25, 27)$
(a, b)	$(338, 337)$	$(114, 111)$	$(70, 65)$	$(42, 33)$	$(30, 15)$	$(26, 1)$

所以 675 恰好有 **6** 種不同的方法寫成兩個平方數之差。

> ? **想一想** (a, b) 與 $(-a, b)$，或者 $a^2 - b^2$ 與 $-(b^2 - a^2)$，應否算作不同的寫法？

不應該。題目把一切限制於非負整數，而 $a^2 - b^2 = 675 > 0$ 迫使 $a > b$。所以每種寫法就是單一一對 (a, b)，其中 $a > b \geq 0$，而這正是我們所數的。

驗算

- 抽查表格：$26^2 - 1^2 = 676 - 1 = 675$ 及 $30^2 - 15^2 = 900 - 225 = 675$。
- 第 (ii)–(iv) 部分合起來說明：$n \geq 1$ 是兩個平方數之差，當且僅當 $n \not\equiv 2 \pmod 4$。用電腦逐一檢查不超過 2000 的每個 n，結果吻合；另外亦驗證了對所有奇質數 $p \leq q < 200$，pq 恰好有兩種表示法，而 $2p$ 則一種也沒有。
- 對所有 b 進行搜尋，找到 675 恰好有六種表示法，正是表中那六種。

常見錯誤

- 忘記奇偶條件：例如對 $2p$ 把 $(2, p)$ 這類因數對也算進去，這會給出非整數 $a = \frac{p+2}{2}$。
- 在第 (v) 部分漏掉 $p = q$ 的情況，或在那裏排除 $p^2 - 0^2$。除第 (i) 部分外，零是容許的。

► 在第 (vi) 部分數了因數的個數（12），而不是因數對的數目（6）。

STEP 之外

這裏的規律——表示法的數目由 n 的因數決定——是初等數論（elementary number theory）中的典型現象。一個著名的近親是費馬（Fermat）的二平方和定理：奇質數可寫成 $x^2 + y^2$，當且僅當它是 $1 \bmod 4$；這個命題可以利用高斯整數（Gaussian integers）$a + bi$ 簡潔地證明。想了解更多，可閱讀 Davenport 的 *The Higher Arithmetic*（《高等算術》）。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。