詳細解答

STEP III 2013，第 9 題

力學 • 浮力與簡諧運動

> **STEP III 2013，第 9 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/13-s3-q9

關鍵思路

球體浸沒在液體中的部分是一個球冠（spherical cap），其體積可以把它切成一片片圓盤求得，這就是旋轉體體積（volume of revolution）的計算。之後，題目就是應用牛頓第二定律（Newton's second law），除了重力之外，唯一的力就是浮力（buoyancy）。對於小幅振動，我們設 $x = x_0 + y$，把右邊的三次式在平衡位置附近線性化（linearise），再從形如 $\ddot{y} = -\omega^2 y$ 的方程讀出 ω^2。

解答

排開的體積

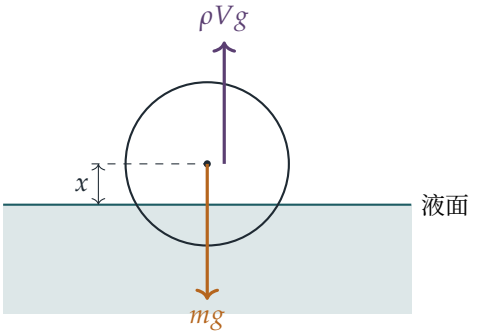
取球心為原點，z 向上量度。液面就是平面 $z = -x$，浸沒部分就是球體中 $-R \le z \le -x$ 的部分。這對 $-R < x < R$ 有意義，因此涵蓋了題目所述的情況。在高度 z 處，截面是半徑為 $\sqrt{R^2 - z^2}$ 的圓盤，所以

$$\begin{aligned} V &= \int_{-R}^{-x} \pi\left(R^2 - z^2\right) \mathrm{d}z = \pi\left[R^2 z - \tfrac{1}{3}z^3\right]_{-R}^{-x} \\ &= \pi\left(-R^2 x + \tfrac{1}{3}x^3 + R^3 - \tfrac{1}{3}R^3\right) = \frac{\pi}{3}\left(2R^3 - 3R^2 x + x^3\right), \end{aligned}$$

這就是所求的體積。

運動方程

把球體視為作鉛直運動的剛體（rigid body）。由於水缸很大，球體上下浮動時液面不會移動，所以 $\ddot{x}$ 就是球體向上的加速度。球體的質量為 $m = \frac{4}{3}\pi R^3 \rho_s$。作用在球體上的力有兩個：向下的重量 mg，以及向上的浮力 $\rho V g$。



沿鉛直方向分解，以向上為正，

$$m\ddot{x} = \rho V g - mg \quad \Longrightarrow \quad m\,(g + \ddot{x}) = \rho g V.$$

代入 m 和 V：

$$\tfrac{4}{3}\pi R^3 \rho_\mathrm{s}\,(g + \ddot{x}) = \tfrac{\pi}{3}\left(2R^3 - 3R^2 x + x^3\right)\rho g,$$

兩邊乘以 $3/\pi$，得

$$4R^3 \rho_\mathrm{s}\,(g + \ddot{x}) = \left(2R^3 - 3R^2 x + x^3\right)\rho g,$$

此即所求。

平衡時的密度

在平衡（equilibrium）時 $\ddot{x} = 0$。代入 $x = \frac{1}{2}R$：

$$4R^3 \rho_\mathrm{s} g = \left(2R^3 - \tfrac{3}{2}R^3 + \tfrac{1}{8}R^3\right)\rho g = \tfrac{5}{8}R^3 \rho g,$$

所以

$$\rho_\mathrm{s} = \frac{5}{32}\,\rho.$$

這個值小於 $\frac{1}{2}\rho$，理應如此：球心在液面之上，所以浸沒在液體中的部分少於球體的一半。

小幅振動

設 $f(x) = 2R^3 - 3R^2 x + x^3$，並設 $x = \frac{1}{2}R + y$，其中 y 很小。於是 $\ddot{x} = \ddot{y}$。

> ? **想一想** 怎樣把這個三次式變成關於 y 的線性式？

我們把 f 在平衡位置附近展開，只保留一階項：$f(\frac{1}{2}R + y) \;=\; f(\frac{1}{2}R) + f'(\frac{1}{2}R)\,y + O(y^2)$。這裏

$$f'(x) = -3R^2 + 3x^2, \qquad f'(\tfrac{1}{2}R) = -3R^2 + \tfrac{3}{4}R^2 = -\tfrac{9}{4}R^2,$$

而由前面的計算，$f(\frac{1}{2}R) = \frac{5}{8}R^3$。利用 $\rho_s = \frac{5}{32}\rho$，運動方程的左邊為 $4R^3 \cdot \frac{5}{32}\rho\,(g+\ddot{y}) = \frac{5}{8}R^3\rho\,(g+\ddot{y})$。因此，準確至一階，

$$\tfrac{5}{8}R^3\rho\,(g+\ddot{y}) = \left(\tfrac{5}{8}R^3 - \tfrac{9}{4}R^2 y\right)\rho g.$$

兩邊的 $\frac{5}{8}R^3\rho g$ 項互相抵消（這正是平衡條件），剩下

$$\tfrac{5}{8}R^3\ddot{y} = -\tfrac{9}{4}R^2 g\, y \quad\Longrightarrow\quad \ddot{y} = -\frac{18g}{5R}\,y.$$

這是簡諧運動（simple harmonic motion），其中 $\omega^2 = \dfrac{18g}{5R}$，所以小幅振動的週期（period）為

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{5R}{18g}}.$$

驗算

- 體積：當 $x = R$ 時，公式給出 0（球體剛好接觸液面）；當 $x = 0$ 時給出 $\frac{2}{3}\pi R^3$（半個球體）；當 $x = -R$ 時給出 $\frac{4}{3}\pi R^3$（完全浸沒）。
- 量綱（dimensions）：$\omega^2 = 18g/(5R)$ 的單位是 s^{-2}，理應如此。
- 數值：取 $R = 1\,\mathrm{m}$ 及 $g = 9.81\,\mathrm{m\,s^{-2}}$，週期約為 $1.06\,\mathrm{s}$。用電腦從一個小位移出發，逐步推進完整的非線性方程，得到的週期與此相同，誤差小於萬分之一（10^4 分之一）。

常見錯誤

- 把浸沒球冠的高度當作 x 而不是 $R - x$：x 是球心在液面之上的高度。
- 忘記回復力來自 $f'(\frac{1}{2}R)$，而它是負數。這裏出現正負號錯誤會得到 $\ddot{y} = +\omega^2 y$，那根本不是振動。
- 漏掉左邊球體本身的質量：與 $\ddot{x}$ 相乘的是 ρ_s，而不是 ρ。（現實中的浮體還會帶動周圍部分液體一起運動，即所謂「附加質量」（added mass），但題目叫我們忽略這一點。）

STEP 之外

這裏所用的方法——把力在平衡位置附近展開並保留線性項——是求任何系統小幅振動的標準方法。線性項的正負號決定穩定性，其大小則決定頻率。在大學一年級的課程中，

這會發展為 $\ddot{x} = F(x)$ 的線性化，然後在有多個自由度（degrees of freedom）時，進一步研究簡正模態（normal modes）。Kleppner 與 Kolenkow 合著的 *An Introduction to Mechanics*（《力學導論》）以這個程度講解了平衡位置附近的小幅振動及流體浮力。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。