詳細解答

STEP III 2013，第 8 題

純數學 • 圓錐曲線的極坐標方程

STEP III 2013，第 8 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

step.maths.org/questions/13-s3-q8

關鍵思路

關係式 $r = ks$（其中 $k < 1$）表明 E 是一個以 O 為焦點（focus）、以 D 為準線（directrix）的橢圓（ellipse）；若採用以 O 為中心的極坐標（polar coordinates），它便化為一條以 θ 表示 r 的非常簡單的方程。一條經過 O 的弦（chord）其實就是兩條方向相反的半徑，因此 $1/l$ 會化為一個關於 $\cos^2\theta$ 的簡單式子。接着，n 條等距分佈的直線把總和轉化為一些 $\cos 2\theta$ 項之和，而這正是開首那個求和所處理的。

解答

開首的求和

各項組成一個等比數列（geometric progression），首項為 $\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\alpha}$，公比（common ratio）為 $w = \mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}/n}$。由於 $n \geq 2$，角 $2\pi/n$ 位於 $(0, \pi]$ 內，所以 $w \neq 1$，我們可以使用一般的公式：

$$\sum_{r=0}^{n-1} \mathrm{e}^{2\mathrm{i}(\alpha + r\pi/n)} = \mathrm{e}^{2\mathrm{i}\alpha}\,\frac{1-w^n}{1-w} = \mathrm{e}^{2\mathrm{i}\alpha}\,\frac{1-\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}}}{1-w} = 0.$$

取實部（real part），得 $\sum_{r=0}^{n-1} \cos(2\alpha + 2r\pi/n) = 0$；我們將會用到的正是這個形式。

距離 s

如圖所示，從 O 到 D 的垂線起量度 θ。該垂線的垂足與 O 的距離為 d，而 P 在同一方向上與 O 的距離為 $r\cos\theta$，因此當 P 與 O 位於 D 的同一側時，

$$s = d - r\cos\theta.$$

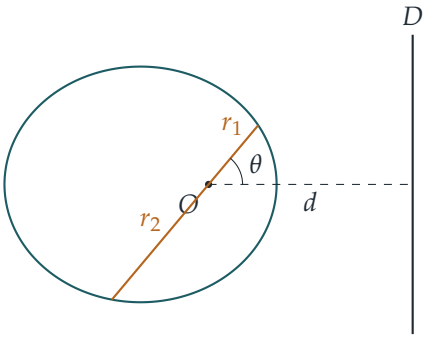
（這對所有 θ 均成立：當 $\cos\theta < 0$ 時，P 比 O 離 D 更遠，而公式亦正確地給出 $s > d$。）

E 的極坐標方程

E 上每一點都與 O 位於 D 的同一側。事實上，若 P 位於另一側，則有 $s = r\cos\theta - d$，而 $r = ks$ 會給出 $r(1 - k\cos\theta) = -kd < 0$；這是不可能的，因為當 $0 < k < 1$ 時 $1 - k\cos\theta > 0$。因此我們可以用 $s = d - r\cos\theta$，於是 $r = ks$ 變為

$$r = k(d - r\cos\theta) \quad \Longrightarrow \quad r = \frac{kd}{1 + k\cos\theta}.$$

由於 $k < 1$，分母對所有 θ 均為正，所以從 O 出發的每條射線與 E 恰好相交一次。



經過 O 的弦的長度

一條經過 O、與垂線成角 θ 的直線，與 E 相交於方向 θ 及 $\theta + \pi$ 上的兩點，而這兩點位於 O 的兩側。由於 $\cos(\theta + \pi) = -\cos\theta$，弦長為

$$l = \frac{kd}{1 + k\cos\theta} + \frac{kd}{1 - k\cos\theta} = \frac{2kd}{1 - k^2\cos^2\theta}, \qquad \text{因此} \qquad \frac{1}{l} = \frac{1 - k^2\cos^2\theta}{2kd}.$$

留意這只取決於直線本身，而與我們把它的哪一個方向稱為 θ 無關。

想一想 我們應如何把 $\cos^2\theta$ 對 n 條直線求和？

利用倍角公式（double-angle formula）$\cos^2\theta = \frac{1}{2}(1 + \cos 2\theta)$：那些 $\cos 2\theta$ 項正好就是開首求和的實部。

對 n 條直線求和

由於相鄰直線之間的夾角為 π/n，對某個固定的 α，這 n 條直線所成的角為 $\theta_j = \alpha + j\pi/n$（$j = 1, \ldots, n$）。這 n 個 $2\theta_j$ 的值是 $2\alpha + 2j\pi/n$；把 $j = n$ 換成 $j = 0$（這只會令 $2\theta_j$ 改變 2π）後，它們正是開首求和中的各個角。因此

$$\sum_{j=1}^{n} \cos^2\theta_j = \frac{n}{2} + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n} \cos 2\theta_j = \frac{n}{2} + 0 = \frac{n}{2},$$

從而

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{l_j} = \frac{1}{2kd}\left(n - k^2 \cdot \frac{n}{2}\right) = \frac{(2-k^2)n}{4kd},$$

這就是所求的結果。條件 $n \geq 2$ 只用過一次，就是用來確保開首求和中 $w \neq 1$。

驗算

- 取 $n = 2$、$k = \frac{1}{2}$、$d = 1$，兩條直線分別沿着 OD 及垂直於 OD。沿 OD 的弦是長軸（major axis），長度為 $\frac{1/2}{3/2} + \frac{1/2}{1/2} = \frac{4}{3}$；垂直於它的弦（即正焦弦（latus rectum））長度為 $2kd = 1$。所以總和為 $\frac{3}{4} + 1 = \frac{7}{4}$，而公式給出 $\frac{(7/4)\cdot 2}{2} = \frac{7}{4}$。
- 當 $n = 1$ 時，結果並不成立，這是理所當然的：單一條直線的 $1/l$ 取決於它的方向。而 $n = 1$ 正是 $w = 1$ 的情況。
- 我們用電腦對隨機的 d、k、n 及 α 直接從 $r = ks$ 求出每條弦作驗算，結果與公式吻合；例如 $d = 1$、$k = \frac{1}{2}$、$n = 3$ 時，對任何 α 都得到 $2.625 = \frac{21}{8}$。

常見錯誤

- 寫成 $s = d + r\cos\theta$：在圖中 θ 是朝 D 的方向量度的，所以沿 OP 向外移動會令你更接近 D。
- 把弦的另一半再次當作 $kd/(1 + k\cos\theta)$，忘記了相反方向的角是 $\theta + \pi$。
- 直接把角 $\alpha + j\pi/n$ 求和，而不是對 $2\theta_j$ 求和：均勻地繞圓周一圈的是倍角，這正是開首求和中出現因子 2 的原因。

STEP 之外

焦點－準線定義使每一條圓錐曲線（conic）都有極坐標方程 $r = \ell/(1 + e\cos\theta)$，其中 $e < 1$、$e = 1$ 及 $e > 1$ 分別對應橢圓、拋物線（parabola）及雙曲線（hyperbola）；當我們解牛頓（Newton）的行星運動方程時，開普勒（Kepler）的軌道正是以這個形式出現。任意兩條互相垂直的焦點弦（focal chord）的 $1/l_1 + 1/l_2$ 都相同，這是一個經典性質，而本題的結果正是它的推廣。Kleppner 與 Kolenkow 所著的 *An Introduction to Mechanics*（《力學導論》）便是用這種方法推導軌道方程的。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。