詳細解答

STEP III 2013，第 7 題

純數學 • 常微分方程的能量法

> **STEP III 2013，第 7 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/13-s3-q7

本題在 *Beyond STEP* 第 8.2 節*不求解而估界*中有完整的引導式講解：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/ch08/bounding-without-solving.html

關鍵思路

每條方程都像一粒繫在彈簧上的質點：一個只依賴於未知函數的「力」項，再加上（在 (ii) 和 (iii) 中）一個與導數（derivative）成正比的摩擦項。將方程乘以導數，就可以把它化成某個「能量」的導數。沒有摩擦時，能量守恆；若摩擦從不朝錯誤方向推動，能量就只會減少，因此永遠不會超過其初始值。第 (iii) 部分要求我們自行構造能量，並證明摩擦係數從不為負。

解答

第 (i) 部分

記 $y' = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$。由鏈式法則（chain rule），

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{dE}}{\mathrm{d}x} &= 2y'y'' + 2y^3y' \\ &= 2y'\left(y'' + y^3\right) = 0,\end{aligned}$$

這裏用了微分方程（differential equation）。因此 E 是常數，其值為 $\mathrm{E}(0) = 0^2 + \frac{1}{2}\cdot 1^4 = \frac{1}{2}$。故對每個 x，

$$\tfrac{1}{2}y^4 = \tfrac{1}{2} - (y')^2 \le \tfrac{1}{2},$$

因為 $(y')^2 \ge 0$。所以 $y^4 \le 1$，即對所有 x 都有 $|y(x)| \le 1$。

第 (ii) 部分

用同樣方法求導，再把方程寫成 $v'' + \sinh v = -xv'$ 的形式代入，

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{dE}}{\mathrm{d}x} &= 2v'v'' + 2\sinh v\, v' \\ &= 2v'\big(v'' + \sinh v\big) \\ &= -2x\,(v')^2.\end{aligned}$$

當 $x \geq 0$ 時，x 與 $(v')^2$ 均非負，所以 $\frac{\mathrm{dE}}{\mathrm{d}x} \leq 0$，正如所求。

因此 E 在 $x \geq 0$ 上非遞增（non-increasing），並在該範圍內有 $\mathrm{E}(x) \leq \mathrm{E}(0)$。在 $x = 0$ 處，$\cosh(\ln 3) = \frac{1}{2}\big(3 + \frac{1}{3}\big) = \frac{5}{3}$，所以 $\mathrm{E}(0) = 0 + 2 \cdot \frac{5}{3} = \frac{10}{3}$。因此，當 $x \geq 0$ 時，

$$2\cosh v(x) = \mathrm{E}(x) - (v')^2 \leq \mathrm{E}(x) \leq \tfrac{10}{3},$$

故 $\cosh v(x) \leq \frac{5}{3}$。

第 (iii) 部分

仿照 (ii)，我們尋找形如 $\mathrm{E} = (w')^2 + F(w)$ 的能量。於是

$$\frac{\mathrm{dE}}{\mathrm{d}x} = 2w'w'' + F'(w)\,w' = w'\big(2w'' + F'(w)\big),$$

我們希望借助方程，使括號內變成 w' 的倍數。只要 $F'(w) = 2(w\cosh w + 2\sinh w)$，就能做到這一點。

想一想 哪個 w 的函數的導數是 $w\cosh w + 2\sinh w$？

用分部積分（integration by parts），$\int w\cosh w\,\mathrm{d}w = w\sinh w - \cosh w$，而 $\int 2\sinh w\,\mathrm{d}w = 2\cosh w$。兩者相加，

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}w}\big(w\sinh w + \cosh w\big) = \sinh w + w\cosh w + \sinh w = w\cosh w + 2\sinh w.$$

所以我們取

$$\mathrm{E}(x) = \left(\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}x}\right)^2 + 2\big(w\sinh w + \cosh w\big).$$

記 $g(x) = 5\cosh x - 4\sinh x - 3$，方程即為 $w'' + (w\cosh w + 2\sinh w) = -g(x)\,w'$，所以

$$\frac{\mathrm{dE}}{\mathrm{d}x} = 2w'\big(w'' + w\cosh w + 2\sinh w\big) = -2g(x)\,(w')^2.$$

想一想 $g(x)$ 會不會是負數？

用指數函數表示，

$$\begin{aligned} g(x) &= \tfrac{5}{2}\left(\mathrm{e}^{x}+\mathrm{e}^{-x}\right)-2\left(\mathrm{e}^{x}-\mathrm{e}^{-x}\right)-3 \\ &= \tfrac{1}{2}\mathrm{e}^{x}-3+\tfrac{9}{2}\mathrm{e}^{-x} \\ &= \tfrac{1}{2}\mathrm{e}^{-x}\left(\mathrm{e}^{2x}-6\mathrm{e}^{x}+9\right)=\tfrac{1}{2}\mathrm{e}^{-x}\left(\mathrm{e}^{x}-3\right)^{2} \;\geq\; 0 \end{aligned}$$

對每個 x 都成立（只在 $x=\ln 3$ 處等於零）。因此 $\frac{\mathrm{dE}}{\mathrm{d}x}\leq 0$，並且當 $x\geq 0$ 時 $\mathrm{E}(x)\leq \mathrm{E}(0)$。在 $x=0$ 處，$w=0$ 且 $w'=\frac{1}{\sqrt{2}}$，所以 $\mathrm{E}(0)=\frac{1}{2}+2(0+1)=\frac{5}{2}$。因此，當 $x\geq 0$ 時，

$$2\left(w\sinh w+\cosh w\right)\leq \mathrm{E}(x)\leq \tfrac{5}{2}, \qquad \text{所以} \qquad w\sinh w+\cosh w\leq \tfrac{5}{4}.$$

最後，對每個實數 w 都有 $w\sinh w\geq 0$，因為 w 與 $\sinh w$ 總是同號。略去這一項，便得到當 $x\geq 0$ 時 $\cosh w(x)\leq \frac{5}{4}$，正如所求。

驗算

- 在 (ii) 中，這個界在起點處是緊的（sharp）：$\cosh v(0)=\cosh(\ln 3)=\frac{5}{3}$。
- 在 (iii) 中，$g(0)=5-0-3=2$，與因式分解形式所得的 $\frac{1}{2}(1-3)^2=2$ 一致。
- 對每條方程求數值解，都印證了上述圖像：在 (i) 中 E 一直保持 0.5；在 (ii) 中 E 從 $\frac{10}{3}$ 開始下降；在 (iii) 中 E 從 2.5 開始下降，而 $\cosh w$ 從不超過約 1.03，遠在界 1.25 之內。

常見錯誤

- 把 $F(w)$ 對 x 求導時，忘記鏈式法則帶來的因子 w'。
- 在 (iii) 中，停在 $w\sinh w+\cosh w\leq\frac{5}{4}$，卻沒有解釋為何 $w\sinh w\geq 0$ 使我們可以略去該項。
- 聲稱 $g(x)>0$：它在 $x=\ln 3$ 處等於零，所以只有 $\leq$ 成立（而這已足夠我們所需）。

STEP 之外

這些能量函數就是*李雅普諾夫函數*（*Lyapunov functions*）：沿着解從不增加的量，可用來在不求解的情況下證明一個系統保持有界或逐漸趨於穩定。同一個想法——能量守恆加上阻尼造成的耗散——正是非線性振子（nonlinear oscillators）穩定性理論的基礎。Boyce 與 DiPrima 的 *Elementary Differential Equations*（《初等微分方程》）在講述非線性系統與穩定性的一章中介紹了李雅普諾夫方法。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。