詳細解答

STEP III 2013，第 6 題

純數學 • 複數模的不等式

STEP III 2013，第 6 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

step.maths.org/questions/13-s3-q6

本題在 *Beyond STEP* 第 5.8 節圓盤中隱藏的距離中有完整的引導式講解：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/ch05/poincare-disc.html

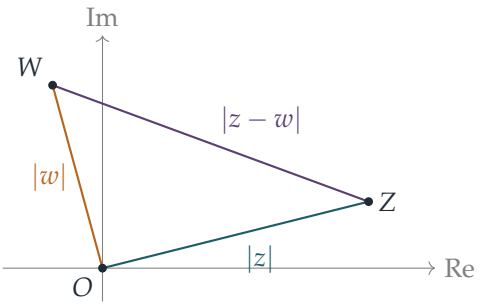
關鍵思路

一切都建基於把模的平方寫成一個數乘以它的共軛（conjugate），即 $|u|^2 = uu^*$。用這個方法展開 $|z-w|^2$ 和 $|1-zw^*|^2$，兩者都會出現相同的交叉項（cross terms）$zw^* + z^*w$，這正是同一個量 E 在兩式中都出現的原因。一旦把兩個模（modulus）都寫成「某數的平方減去 E」的形式，最後的不等式就變成比較 $\frac{A-E}{B-E}$ 與 $\frac{A}{B}$ 這兩個分數，而這歸結為 $B-A$ 的正負號。

解答

三角不等式

在阿岡圖（Argand diagram）中標出原點 O，以及代表 z 和 w 的點 Z 和 W。距離 OZ 和 OW 分別是 $|z|$ 和 $|w|$，而距離 WZ 是 $|z-w|$。



線段 WZ 是由 W 到 Z 的最短路徑，所以它不會比路徑 $W \to O \to Z$ 長：

$$|z-w| = WZ \leq WO + OZ = |w| + |z|.$$

等號成立若且唯若 O 位於線段 WZ 上，即 z 和 w 指向相反方向（或其中一個為 0）。若 O、Z、W 共線（collinear）但 O 不在兩者之間，則這個「三角形」是扁平的，但最短路徑的論證仍然適用。

第 (i) 部分

利用 $|u|^2 = uu^*$ 及 $(z-w)^* = z^* - w^*$，

$$\begin{aligned} |z-w|^2 &= (z-w)(z^*-w^*) \\ &= zz^* + ww^* - zw^* - z^*w \\ &= |z|^2 + |w|^2 - (zw^* + z^*w). \end{aligned}$$

由於 $|zw| = |z||w|$，我們有 $(|z|+|w|)^2 = |z|^2 + |w|^2 + 2|zw|$，所以

$$(|z|+|w|)^2 - E = |z|^2 + |w|^2 + 2|zw| - zw^* - z^*w - 2|zw| = |z-w|^2,$$

得證。移項可得

$$E = (|z|+|w|)^2 - |z-w|^2.$$

右方是兩個實數的平方之差，所以 E 是實數。根據三角不等式（triangle inequality），$0 \leq |z-w| \leq |z| + |w|$，而把非負的量平方不會改變不等號方向，所以 $E \geq 0$。

（直接計算：z^*w 是 zw^* 的共軛，所以 $E = 2\,\mathrm{Re}(zw^*) + 2|zw^*|$，這是實數，而且由於 $\mathrm{Re}\, u \geq -|u|$，它至少為 0。）

第 (ii) 部分

同樣地，利用 $(zw^*)^* = z^*w$，

$$\begin{aligned}|1 - zw^*|^2 &= (1 - zw^*)(1 - z^*w)\\ &= 1 - zw^* - z^*w + zz^*ww^*\\ &= 1 + |zw|^2 - (zw^* + z^*w)\\ &= \left(1 + 2|zw| + |zw|^2\right) - (zw^* + z^*w + 2|zw|)\\ &= (1 + |zw|)^2 - E,\end{aligned}$$

得證。

最後的不等式

設

$$A = (|z| + |w|)^2, \qquad B = (1 + |zw|)^2,$$

於是第 (i) 及 (ii) 部分表明 $|z - w|^2 = A - E$ 及 $|1 - zw^*|^2 = B - E$。

首先，左方是有意義的：若 $|z| > 1$ 且 $|w| > 1$，則 $|zw^*| = |z||w| > 1$，所以 $zw^* \neq 1$，且 $B - E = |1 - zw^*|^2 > 0$。此外 $B > 0$。

所求不等式的兩邊都是非負的，所以它等價（equivalent）於兩邊平方後的不等式

$$\frac{A - E}{B - E} \leq \frac{A}{B}.$$

兩邊同乘以正數 $B(B - E)$，這等價於

$$(A - E)B \leq A(B - E) \iff -EB \leq -EA \iff E(B - A) \geq 0.$$

> **想一想** $B - A$ 的正負號是甚麼？關於 $|z|$ 和 $|w|$ 的條件在哪裏發揮作用？

設 $a = |z|$ 及 $b = |w|$，

$$B - A = (1 + ab)^2 - (a + b)^2 = 1 + a^2b^2 - a^2 - b^2 = (1 - a^2)(1 - b^2).$$

若 $a > 1$ 且 $b > 1$，兩個括號都是負數，所以 $B - A > 0$。由於第 (i) 部分已證 $E \geq 0$，故 $E(B - A) \geq 0$。上面每一步都是等價的，所以

$$\frac{|z - w|}{|1 - zw^*|} \leq \frac{|z| + |w|}{1 + |zw|}.$$

等號成立若且唯若 $E = 0$，即 z 和 w 指向相反方向。

當 $|z|<1$ 且 $|w|<1$ 時

是的，不等式仍然成立。此時 $|zw^*| = ab < 1$，所以同樣有 $zw^* \neq 1$ 及 $B - E > 0$，整條等價推導鏈原封不動地成立。這次 $(1-a^2)(1-b^2)$ 中兩個括號都是正數，所以同樣有 $B - A > 0$，得到 $E(B-A) \geq 0$，從而得出該不等式。

關鍵只在於 $1-a^2$ 與 $1-b^2$ 同號。若一個模大於 1 而另一個小於 1，則 $B - A < 0$，不等式可能不成立：取 $z = 2$、$w = 0.4$，左方為 $1.6/0.2 = 8$，而右方為 $2.4/1.8 = \frac{4}{3}$。

驗算

- 取 $z = 2$、$w = 2\mathrm{i}$。則 $|z-w| = 2\sqrt{2}$，而 $1 - zw^* = 1 - 2(-2\mathrm{i}) = 1 + 4\mathrm{i}$，所以左方為 $2\sqrt{2}/\sqrt{17} \approx 0.686$，右方為 $4/5 = 0.8$。把兩者都乘以 $\frac{1}{4}$（$z = \frac{1}{2}$、$w = \frac{1}{2}\mathrm{i}$）會得到同樣的兩個數，$0.686 \leq 0.8$，這說明了 $|z|, |w| < 1$ 的情況。
- 等號情況：$z = 2 + \mathrm{i}$、$w = -1.5z$ 給出 $E = 0$，兩邊準確至四位小數都等於 0.6577。
- 用電腦對數十萬組隨機數對進行檢驗，證實了兩條恆等式、$E \geq 0$，以及兩種情況下的不等式。

常見錯誤

- 寫成 $|z-w|^2 = |z|^2 + |w|^2 - 2zw^*$：交叉項是 $zw^* + z^*w$，兩者互為共軛，但一般而言並不相等。
- 交叉相乘前沒有檢查 $|1 - zw^*| \neq 0$；這裏 $|zw| \neq 1$ 保證了這一點。
- 因為推導時用了 $|z|, |w| > 1$ 而在最後一部分回答「否」：因式分解（factorisation）$(1-a^2)(1-b^2)$ 顯示，關鍵只在於正負號是否一致。

STEP 之外

由於 $|1 - zw^*| = |1 - z^*w|$，左方是 $\dfrac{z-w}{1-z^*w}$ 的模。對於固定的 z（其中 $|z| < 1$），映射 $w \mapsto \dfrac{z-w}{1-z^*w}$ 是一個把單位圓盤（unit disc）映到自身的莫比烏斯變換（Möbius transformation），而 $\left|\frac{z-w}{1-z^*w}\right|$ 是 z 與 w 之間的偽雙曲距離（pseudo-hyperbolic distance）。本題的不等式表明，這個距離不超過 z 和 w 各自到 0 的距離的「雙曲和」：這是三角不等式的一種加強形式，也是雙曲幾何（hyperbolic geometry）的基礎之一。Needham 的 *Visual Complex Analysis*（《直觀複分析》）以精美的圖像解說莫比烏斯變換和雙曲圓盤。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。