詳細解答

STEP III 2013，第 5 題

純數學 • 有理性與互質性

STEP III 2013，第 5 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

step.maths.org/questions/13-s3-q5

關鍵思路

每一步都只靠一件工具：如果一個數整除一個乘積，而且與其中一個因數互質（co-prime），那麼它必定整除另一個因數。把有理數（rational number）寫成最簡分數（lowest terms），消去分母，然後留意每個因數必須落在哪一邊。在第 (ii) 部分，這個方法把分母 b 夾在兩個事實之間，而除非 b 很小，否則這兩個事實不可能同時成立。

我們會反覆用到一個小事實：*若 p 與 q 互質，則對任何正整數 s、t，p^s 與 q^t 亦互質*。事實上，若有一個質數（prime）同時整除 p^s 和 q^t，它就會同時整除 p 和 q（整除一個乘積的質數必整除其中一個因數，這正是題目所給結果在 a 為質數時的情況），與互質的假設矛盾。

解答

第 (i) 部分

由 $q^nN = p^n$ 可見 p^n 整除 q^nN。由於 p 與 q 互質，p^n 與 q^n 亦互質，於是由題目所給的結果（取 $a = p^n$、$b = q^n$、$c = N$）得知 p^n 整除 N。因此對某個正整數 k，有 $N = kp^n$，即為所求。

代回原式，得 $q^nkp^n = p^n$，所以 $q^nk = 1$。兩者皆為正整數，故 $k = 1$ 且 $q^n = 1$，從而

$$q = 1 \quad (\text{且} N = p^n).$$

現在取任意正整數 n 和 N，並假設 $\sqrt[n]{N}$ 是有理數。它是正數，所以可以寫成 $\sqrt[n]{N} = p/q$，其中 p、q 為正整數，且分數為最簡形式，即 p 與 q 互質。兩邊取 n 次方，得 $q^nN = p^n$，而上面的推導給出 $q = 1$。因此 $\sqrt[n]{N} = p$ 是正整數。所以 $\sqrt[n]{N}$ 要麼是正

整數，要麼是無理數（irrational）。

第 (ii) 部分

已知 $a^a d^b = b^a c^b$，且 $\gcd(a,b) = \gcd(c,d) = 1$。

證明 $d^b = b^a$。由右邊可見 b^a 整除 $a^a d^b$。由於 a 與 b 互質，b^a 與 a^a 互質，所以 b^a 整除 d^b。同理，d^b 整除 $b^a c^b$，而 d^b 與 c^b 互質，所以 d^b 整除 b^a。兩個互相整除的正整數必定相等：

$$d^b = b^a,$$

再在原方程中約去，亦得 $a^a = c^b$。

若 p 是 d 的一個質因數（prime factor），則 p 整除 $d^b = b^a$，而整除 b 的某個冪的質數必整除 b。所以 p 是 b 的一個質因數。

p 的冪。設 p^m 和 p^n 分別是整除 d 和 b 的 p 的最高次冪，由上一段可知 $m, n \geq 1$。由質因數分解唯一性（unique factorisation），整除 d^b 的 p 的最高次冪是 p^{mb}，而整除 b^a 的則是 p^{na}。由於 $d^b = b^a$，兩者相等，所以 $mb = na$，且

$$b = \frac{na}{m}.$$

> **想一想** $b = na/m$ 怎樣給出 p^n 的一個上界？

把它改寫成 $mb = na$：於是 b 整除 na。但 b 與 a 互質，所以由題目所給的結果，b 整除 n，特別地 $b \leq n$。另外 p^n 整除 b，所以 $p^n \leq b$。合起來，

$$p^n \leq b \leq n.$$

但 $p \geq 2$ 且 $n > 0$，所以由題目給出的事實 $y^x > x$（取 $y = p$、$x = n$）得 $p^n > n$。這個矛盾說明我們的假設不可能成立：d *沒有*任何質因數。因此 $d = 1$，於是 $b^a = d^b = 1$，從而

$$b = 1.$$

最後部分

設 r 是正有理數，且 r^r 是有理數。把 $r = a/b$ 寫成最簡形式（a, b 為正整數且互質），並把 $r^r = c/d$ 寫成最簡形式（由於 $r^r > 0$，c, d 為正整數，且互質）。那麼

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{a/b} = \frac{c}{d} \quad \Longrightarrow \quad \left(\frac{a}{b}\right)^{a} = \left(\frac{c}{d}\right)^{b} \quad \Longrightarrow \quad a^a d^b = b^a c^b,$$

這裏把兩邊取 b 次方，再消去分母。這正好是第 (ii) 部分的情況，所以 $b = 1$，而 $r = a$ 是正整數。

驗算

- 整數 r 確實符合條件：$r = 2$ 給出 $r^r = 4$；而結論 $c^b = a^a$ 在 $b = 1$ 時就是 $c = a^a$，理應如此。
- 一個反面例子：$r = \frac{1}{2}$ 給出 $r^r = 1/\sqrt{2}$，是無理數，與結果一致。在第 (i) 部分，$\sqrt[3]{27} = 3$ 而 $\sqrt[3]{24}$ 是無理數：兩種情況都會出現。
- 用電腦搜尋所有互質的 $a, b \leq 24$、$c < 200$、$d < 60$，只找到 $b = d = 1$ 時 $a^a d^b = b^a c^b$ 的解（即 $a = 1, 2, 3$，且 $c = a^a$）。

常見錯誤

- 忘記交代爲何 p^n 與 q^n 互質：題目所給的結果是關於 a 與 b 互質的，所以你需要那些冪互質。
- 由 $b = na/m$ 直接得出 $p^n \leq n$，卻漏了 $b \mid n$ 這一步：正是 a 與 b 互質，才把 $mb = na$ 變成 $b \mid n$。
- 寫了 $(a/b)^{a/b} = c/d$，卻沒有堅持 c/d 是最簡形式；沒有 $\gcd(c, d) = 1$，$d^b \mid b^a$ 這一步就不成立。

STEP 之外

題目所給的「互質因數」結果就是歐幾里得（Euclid）引理（Euclid's lemma），通常由貝祖（Bézout）等式（Bézout's identity）證明，它也是質因數分解唯一性背後的推動力。第一部分是 $\sqrt{2}$ 為無理數這個結果的一般化版本；第二部分則讓你初嘗超越數論（transcendence theory）的滋味：在這個理論中，格爾豐德–施奈德定理（Gelfond–Schneider theorem）證明了，例如 $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ 甚至不是代數數（algebraic number）。Davenport 的 *The Higher Arithmetic*（《高等算術》）把這些基礎發展得非常優美。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。