詳細解答

STEP III 2013，第 4 題

純數學 • 單位根的乘積

> **STEP III 2013，第 4 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/13-s3-q4

本題在 *Beyond STEP* 第 5.3 節因式分解 $z^{2n}+1$ 中有完整的引導式講解：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/ch05/z2n-plus-one.html

關鍵思路

$z^{2n}=-1$ 的根以共軛（conjugate）對 $\mathrm{e}^{\pm \mathrm{i}\theta}$ 的形式出現，而每一對相乘都得出一個實係數二次式，由此便得到所需的因式分解（factorisation）。接着，只要選取一個恰當的 z 值，就能把這個因式分解變成一個關於餘弦的命題：當 $z=\mathrm{i}$ 時，每個二次式中 z^2+1 的部分都等於零，只剩下 $-2z\cos\theta$ 這一項。在第 (ii) 部分，同樣的代入會令兩邊都等於零，所以我們要先約去在 $z=\mathrm{i}$ 時等於零的那個因式。

解答

因式分解

展開，

$$\begin{aligned}(z-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})(z-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}) &= z^2 - z\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}\right) + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta} \\ &= z^2 - 2z\cos\theta + 1,\end{aligned}$$

因為 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}=2\cos\theta$。

現在，$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ 滿足 $z^{2n}=-1=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi}$ 當且僅當 $2n\theta$ 是 π 的奇數倍，即對某整數 k，$\theta=\frac{(2k-1)\pi}{2n}$。在 $(-\pi,\pi]$ 內的值是

$$\theta = \pm\frac{\pi}{2n},\ \pm\frac{3\pi}{2n},\ \ldots,\ \pm\frac{(2n-1)\pi}{2n},$$

因為 $\frac{(2n-1)\pi}{2n} < \pi$，而 $\frac{(2n+1)\pi}{2n} > \pi$。這些是 $2n$ 個互不相同的根，所以它們就是 -1 的全部 $(2n)$ 次方根：

$$\mathrm{e}^{\pm \mathrm{i}\theta_k}, \qquad \theta_k = \frac{(2k-1)\pi}{2n}, \quad k = 1, 2, \ldots, n.$$

由於 $z^{2n}+1$ 是 $2n$ 次的首一（monic）多項式（polynomial），而且有這 $2n$ 個互不相同的根，

$$z^{2n}+1 = \prod_{k=1}^{n} (z - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_k})(z - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta_k}) = \prod_{k=1}^{n} \left(z^2 - 2z\cos\theta_k + 1\right),$$

這裏對每一對共軛根都用了第一個結果。這就是所求的恆等式。

第 (i) 部分

代入 $z = \mathrm{i}$。每個因式變成

$$\mathrm{i}^2 - 2\mathrm{i}\cos\theta_k + 1 = -2\mathrm{i}\cos\theta_k,$$

而由於 n 是偶數，左邊是 $\mathrm{i}^{2n}+1 = (-1)^n + 1 = 2$。因此

$$2 = (-2\mathrm{i})^n \prod_{k=1}^{n} \cos\theta_k.$$

由於 n 是偶數，$(-2)^n = 2^n$ 而 $\mathrm{i}^n = (\mathrm{i}^2)^{n/2} = (-1)^{\frac{1}{2}n}$，所以 $(-2\mathrm{i})^n = 2^n(-1)^{\frac{1}{2}n}$。因此

$$\prod_{k=1}^{n} \cos\theta_k = \frac{2}{2^n(-1)^{\frac{1}{2}n}} = (-1)^{\frac{1}{2}n} 2^{1-n},$$

這裏用了 $1/(-1)^{\frac{1}{2}n} = (-1)^{\frac{1}{2}n}$。左邊的乘積正是 $\cos\frac{\pi}{2n}\cos\frac{3\pi}{2n}\cdots\cos\frac{(2n-1)\pi}{2n}$，得證。

第 (ii) 部分

? **想一想** 為甚麼不直接把 $z = \mathrm{i}$ 再代入因式分解？

當 n 是奇數時，$\mathrm{i}^{2n}+1 = (-1)^n + 1 = 0$，所以左邊等於零。在右邊，中間的值 $k = m$（其中 $m = \frac{1}{2}(n+1)$）給出 $\theta_m = \frac{n\pi}{2n} = \frac{\pi}{2}$，所以該因式是 z^2+1，它在 $z = \mathrm{i}$ 時同樣等於零。我們只得到 $0 = 0$，甚麼也得不到。解決辦法是先從兩邊約去因式 z^2+1。

利用題目給出的事實和因式分解，

$$(1+z^2)\left(1 - z^2 + z^4 - \cdots + z^{2n-2}\right) = (z^2+1)\prod_{k\neq m}\left(z^2 - 2z\cos\theta_k + 1\right).$$

這些都是多項式，而 z^2+1 不是零多項式，所以我們可以把它約去（多項式除法的結果是唯一的）：

$$1 - z^2 + z^4 - \cdots + z^{2n-2} = \prod_{k\neq m}\left(z^2 - 2z\cos\theta_k + 1\right),$$

這是一個多項式恆等式，對每個 z 都成立，包括 $z = \mathrm{i}$。

現在代入 $z = \mathrm{i}$。在左邊，$(-1)^j z^{2j}$ 這一項變成 $(-1)^j(-1)^j = 1$，而共有 n 項（$j = 0, 1, \ldots, n-1$），所以左邊等於 n。右邊有 $n-1$ 個因式，每個都等於 $-2\mathrm{i}\cos\theta_k$：

$$n = (-2\mathrm{i})^{n-1} \prod_{k \neq m} \cos\theta_k.$$

由於 $n-1$ 是偶數，與第 (i) 部分完全一樣，$(-2\mathrm{i})^{n-1} = 2^{n-1}(-1)^{\frac{1}{2}(n-1)}$。

要把乘積化成平方，可把 k 與 $n+1-k$ 配對。由於

$$\theta_{n+1-k} = \frac{(2n+1-2k)\pi}{2n} = \pi - \theta_k,$$

我們有 $\cos\theta_{n+1-k} = -\cos\theta_k$。所有 $k \neq m$ 的值可分成 $\frac{1}{2}(n-1)$ 對 $\{k, n+1-k\}$，其中 $1 \leq k \leq \frac{1}{2}(n-1)$，所以

$$\prod_{k \neq m} \cos\theta_k = \prod_{k=1}^{(n-1)/2} \left(-\cos^2\theta_k\right) = (-1)^{\frac{1}{2}(n-1)} P, \qquad P = \prod_{k=1}^{(n-1)/2} \cos^2\theta_k.$$

綜合起來，兩個符號 $(-1)^{\frac{1}{2}(n-1)}$ 相乘得 $+1$：

$$n = 2^{n-1}(-1)^{\frac{1}{2}(n-1)}(-1)^{\frac{1}{2}(n-1)} P = 2^{n-1} P,$$

所以 $P = n\,2^{1-n}$。P 中最後一個因式對應 $k = \frac{1}{2}(n-1)$，即 $\theta_k = \frac{(n-2)\pi}{2n}$，所以 P 正是

$$\cos^2\frac{\pi}{2n}\cos^2\frac{3\pi}{2n}\cdots\cos^2\frac{(n-2)\pi}{2n} = n\,2^{1-n},$$

得證。（當 $n = 1$ 時，乘積是空乘積，等於 $1 = 1 \cdot 2^0$，結果一致。）

驗算

- 第 (i) 部分取 $n = 2$：$\cos\frac{\pi}{4}\cos\frac{3\pi}{4} = -\frac{1}{2} = (-1)^1 2^{-1}$。當 $n = 4$ 時，乘積是 $\frac{1}{8}$，與 $(-1)^2 2^{-3}$ 吻合。
- 第 (ii) 部分取 $n = 3$：$\cos^2\frac{\pi}{6} = \frac{3}{4} = 3 \cdot 2^{-2}$。當 $n = 5$ 時，$\cos^2\frac{\pi}{10}\cos^2\frac{3\pi}{10} = 0.3125 = \frac{5}{16}$。
- 兩條恆等式亦已用電腦對所有不超過 39 的 n 驗證過，而因式分解也在隨機選取的複數 z 上測試過。

常見錯誤

- 在第 (ii) 部分直接把 $z = \mathrm{i}$ 代入因式分解，結果只得到 $0 = 0$。

- 弄錯符號：在第 (i) 部分，當 $n \equiv 2 \pmod 4$ 時答案確實是負數，因為對於大於 $\frac{\pi}{2}$ 的那 $\frac{1}{2}n$ 個角，$\cos\theta_k < 0$。
- 忘記 $\cos\theta_{n+1-k} = -\cos\theta_k$，因而在組成平方時弄錯符號。

STEP 之外

同樣的技巧——把 $z^N \pm 1$ 按其單位根（roots of unity）作因式分解，再在一個巧妙的點上求值——可以得出一整族乘積公式，例如 $\prod_{k=1}^{n-1} \sin\frac{k\pi}{n} = \frac{n}{2^{n-1}}$（試在 $\frac{z^n-1}{z-1}$ 中代入 $z=1$）。在這類有限乘積中令 $n \to \infty$，便會得到歐拉（Euler）的無窮乘積（infinite product）$\sin\pi x = \pi x\prod_{k\geq 1}\left(1-\frac{x^2}{k^2}\right)$，讓你初嘗複分析（complex analysis）如何由函數的零點把函數建構出來。Needham 的 *Visual Complex Analysis*（《直觀複分析》）是從幾何角度欣賞單位根及這些概念的絕佳讀物。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。