詳細解答

STEP III 2013，第 3 題

純數學 • 向量與球面

> **STEP III 2013，第 3 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/13-s3-q3

關鍵思路

一切都源於兩個事實：每個 $\mathbf{p}_i$ 都是單位向量（unit vector），而且四者之和為 $\mathbf{0}$。把長度的平方展開為點積（dot product），就能把 $(XP_i)^2$ 化成關於 $\mathbf{x}\cdot\mathbf{p}_i$ 的線性（linear）式子；由於 $\sum \mathbf{p}_i = \mathbf{0}$，線性項之和便會全部消去。至於四次方，會剩下一個二次項，因此需要實際的坐標，而這正是第 (ii) 部分所提供的。

解答

點積 $\mathbf{p}_i \cdot \mathbf{p}_j$

由於這是正四面體（regular tetrahedron），六條棱的長度全部相等。對 $i \neq j$，

$$(P_iP_j)^2 = (\mathbf{p}_i - \mathbf{p}_j)\cdot(\mathbf{p}_i - \mathbf{p}_j) = |\mathbf{p}_i|^2 + |\mathbf{p}_j|^2 - 2\,\mathbf{p}_i\cdot\mathbf{p}_j = 2 - 2\,\mathbf{p}_i\cdot\mathbf{p}_j,$$

這裏用了 $|\mathbf{p}_i| = 1$（每個頂點都在單位球面（unit sphere）上）。因此，棱長相等迫使每個 $\mathbf{p}_i\cdot\mathbf{p}_j$（$i \neq j$）都取同一個值；記這個值為 c。

現在把 $\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 + \mathbf{p}_3 + \mathbf{p}_4 = \mathbf{0}$ 與 $\mathbf{p}_1$ 作點積：

$$\mathbf{p}_1\cdot\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_1\cdot\mathbf{p}_2 + \mathbf{p}_1\cdot\mathbf{p}_3 + \mathbf{p}_1\cdot\mathbf{p}_4 = 0 \quad\Longrightarrow\quad 1 + 3c = 0,$$

所以 $c = -\frac{1}{3}$。即對所有 $i \neq j$，都有 $\mathbf{p}_i\cdot\mathbf{p}_j = -\frac{1}{3}$，得證。

第 (i) 部分

由於 $|\mathbf{x}| = 1$ 亦成立，

$$(XP_i)^2 = (\mathbf{p}_i - \mathbf{x})\cdot(\mathbf{p}_i - \mathbf{x}) = |\mathbf{p}_i|^2 - 2\,\mathbf{x}\cdot\mathbf{p}_i + |\mathbf{x}|^2 = 2 - 2\,\mathbf{x}\cdot\mathbf{p}_i.$$

對 i 求和，並利用點積的分配律（distributive law），

$$\sum_{i=1}^{4}(XP_i)^2 = 8 - 2\,\mathbf{x}\cdot(\mathbf{p}_1+\mathbf{p}_2+\mathbf{p}_3+\mathbf{p}_4) = 8 - 2\,\mathbf{x}\cdot\mathbf{0} = 8,$$

得證。

第 (ii) 部分

設 $\mathbf{p}_1 = (0,0,1)$ 及 $\mathbf{p}_2 = (a,0,b)$，條件 $\mathbf{p}_1\cdot\mathbf{p}_2 = -\frac{1}{3}$ 立即給出 $b = -\frac{1}{3}$。再由 $|\mathbf{p}_2| = 1$ 得

$$a^2 = 1 - b^2 = \tfrac{8}{9}, \qquad \text{所以} \qquad a = \frac{2\sqrt{2}}{3},$$

由於 $a > 0$，取正根。

設 $\mathbf{p}_3 = (u,v,w)$。三個條件把它確定下來：

$$\mathbf{p}_1\cdot\mathbf{p}_3 = -\tfrac{1}{3} \implies w = -\tfrac{1}{3},$$

$$\mathbf{p}_2\cdot\mathbf{p}_3 = -\tfrac{1}{3} \implies \tfrac{2\sqrt{2}}{3}u + \tfrac{1}{9} = -\tfrac{1}{3} \implies u = -\tfrac{4}{9}\cdot\tfrac{3}{2\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{3},$$

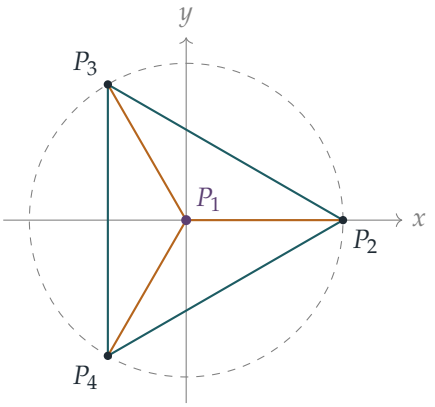
$$|\mathbf{p}_3| = 1 \implies v^2 = 1 - \tfrac{2}{9} - \tfrac{1}{9} = \tfrac{6}{9} \implies v = \pm\frac{\sqrt{6}}{3}.$$

$\mathbf{p}_4$ 滿足完全相同的方程，所以 P_3 和 P_4 就是由此得出的兩個點（它們必須是不同的點，所以各取一個符號）。按其中一種方式標記，

$$P_3 = \left(-\frac{\sqrt{2}}{3}, \frac{\sqrt{6}}{3}, -\frac{1}{3}\right), \qquad P_4 = \left(-\frac{\sqrt{2}}{3}, -\frac{\sqrt{6}}{3}, -\frac{1}{3}\right).$$

（P_3 和 P_4 的標記可以互換。）驗證一下：四個位置向量（position vector）之和確實為 $\mathbf{0}$，而且 $\mathbf{p}_3\cdot\mathbf{p}_4 = \frac{2}{9} - \frac{6}{9} + \frac{1}{9} = -\frac{1}{3}$。

從上方俯視，P_2、P_3、P_4 在平面 $z = -\frac{1}{3}$ 上組成一個等邊三角形（equilateral triangle），而 P_1 位於其中心的正上方：



第 (iii) 部分

由第 (i) 部分，$(XP_i)^2 = 2(1 - \mathbf{x}\cdot\mathbf{p}_i)$，兩邊平方，

$$(XP_i)^4 = 4(1-\mathbf{x}\cdot\mathbf{p}_i)^2 \qquad \Longrightarrow \qquad \sum_{i=1}^{4}(XP_i)^4 = 4\sum_{i=1}^{4}(1-\mathbf{x}\cdot\mathbf{p}_i)^2,$$

得證。展開括號，並再次利用 $\sum \mathbf{x}\cdot\mathbf{p}_i = 0$，

$$\sum_{i=1}^{4}(XP_i)^4 = 4\Big(4 - 2\sum_{i=1}^{4}\mathbf{x}\cdot\mathbf{p}_i + \sum_{i=1}^{4}(\mathbf{x}\cdot\mathbf{p}_i)^2\Big) = 16 + 4\sum_{i=1}^{4}(\mathbf{x}\cdot\mathbf{p}_i)^2.$$

? **想一想** 線性項又一次消失了。為甚麼同一招不能把 $\sum(\mathbf{x}\cdot\mathbf{p}_i)^2$ 也消掉？

平方和對 $\mathbf{p}_i$ 而言並非線性，所以知道 $\sum \mathbf{p}_i = \mathbf{0}$ 並不能直接告訴我們它的值。這正是需要用到坐標的地方。設 $\mathbf{x} = (x, y, z)$，並用第 (ii) 部分的頂點，

$$\mathbf{x}\cdot\mathbf{p}_1 = z, \qquad \mathbf{x}\cdot\mathbf{p}_2 = \tfrac{1}{3}(2\sqrt{2}\,x - z),$$
$$\mathbf{x}\cdot\mathbf{p}_3 = \tfrac{1}{3}(-\sqrt{2}\,x + \sqrt{6}\,y - z), \qquad \mathbf{x}\cdot\mathbf{p}_4 = \tfrac{1}{3}(-\sqrt{2}\,x - \sqrt{6}\,y - z).$$

平方後相加，合併同類項：

- x^2：$\frac{1}{9}(8+2+2) = \frac{4}{3}$；　y^2：$\frac{1}{9}(6+6) = \frac{4}{3}$；　z^2：$1 + \frac{1}{9}(1+1+1) = \frac{4}{3}$。
- xy 和 yz：這兩項只出現在 $\mathbf{x}\cdot\mathbf{p}_3$ 和 $\mathbf{x}\cdot\mathbf{p}_4$ 之中，而這兩者只在 y 項的符號上有分別，所以互相抵消。
- xz：$\frac{1}{9}\big(-4\sqrt{2} + 2\sqrt{2} + 2\sqrt{2}\big) = 0$。

因此

$$\sum_{i=1}^{4}(\mathbf{x}\cdot\mathbf{p}_i)^2 = \tfrac{4}{3}\big(x^2 + y^2 + z^2\big) = \tfrac{4}{3},$$

因為 X 在單位球面上。所以

$$\sum_{i=1}^{4}(XP_i)^4 = 16 + 4\cdot\tfrac{4}{3} = \frac{64}{3},$$

這與 X 的位置無關，得證。

? **想一想** 我們用了特定的坐標。這個結論對內接於球面的每一個正四面體都成立嗎？

成立。任何這樣的四面體都可以繞 O 旋轉（rotation），使 P_1 轉到 $(0,0,1)$，而 P_2 轉到半平面 $y = 0$、$x > 0$ 之內；旋轉保持長度不變，而當 X 走遍整個球面時，它旋轉後的像亦走遍整個球面。所以第 (ii) 部分的坐標並不失一般性。

驗算

- 取 $X = P_1$。各距離為 0 及三條棱，每條長 $\sqrt{2-2(-\frac{1}{3})} = \sqrt{8/3}$。於是 $\sum (XP_i)^2 = 3 \cdot \frac{8}{3} = 8$，而 $\sum (XP_i)^4 = 3 \cdot \frac{64}{9} = \frac{64}{3}$，與兩個結果都吻合。
- 取 $X = (0, 0, -1)$，即 P_1 的對徑點。此時 $XP_1 = 2$，而其餘三個頂點有 $\mathbf{x} \cdot \mathbf{p}_i = \frac{1}{3}$，所以 $(XP_i)^2 = \frac{4}{3}$。這給出 $4 + 3 \cdot \frac{4}{3} = 8$ 及 $16 + 3 \cdot \frac{16}{9} = \frac{64}{3} \approx 21.33$。
- 用電腦在球面上數以千計的隨機點上驗算，每次都得到 8 和 21.333…。

常見錯誤

- 斷言所有 $\mathbf{p}_i \cdot \mathbf{p}_j$ 都相等，卻沒有說明原因：原因是棱長相等，透過 $(P_iP_j)^2 = 2 - 2\,\mathbf{p}_i \cdot \mathbf{p}_j$ 得出。
- 忘記 $|\mathbf{x}| = 1$；推導 $(XP_i)^2 = 2 - 2\,\mathbf{x} \cdot \mathbf{p}_i$ 和最後一步 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ 都需要用到這一點。
- 第 (iii) 部分交叉項（cross terms）的計算錯誤：那裏一個符號出錯，就會留下對 X 的虛假依賴。

STEP 之外

第 (iii) 部分的核心是恆等式 $\sum_i (\mathbf{x} \cdot \mathbf{p}_i)^2 = \frac{4}{3}|\mathbf{x}|^2$，它對每一個向量 $\mathbf{x}$ 都成立。用矩陣（matrix）的語言來說，就是 $\sum_i \mathbf{p}_i \mathbf{p}_i^{\mathsf{T}} = \frac{4}{3} I$：這四個頂點向量的表現猶如一組超完備的標準正交基（over-complete orthonormal basis），稱為緊框架（tight frame）。這一點由對稱性必然成立：該矩陣與四面體的每一個旋轉都可交換，因此必定是 I 的倍數，而它的跡（trace）是 4。球面上的點集，若其低次平均值與球面本身的平均值相同，便稱為球面設計（spherical designs）；它們應用於數值積分（numerical integration）和編碼理論（coding theory）。關於背後的線性代數（外積（outer product）、對稱矩陣（symmetric matrix）和特徵值（eigenvalue）），可參閱斯特朗（Strang）的 *Introduction to Linear Algebra*（《線性代數導論》）。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。