詳細解答

STEP III 2013，第 2 題

純數學 • 麥克勞林級數

> **STEP III 2013，第 2 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/13-s3-q2

關鍵思路

先寫成 $y\sqrt{1-x^2} = \arcsin x$ 以消去平方根，一階導數（derivative）便輕而易舉。再用萊布尼茲法則（Leibniz's rule）對這條一階方程反覆求導，就得到高階關係式。在 $x = 0$ 處大部分項都消失，剩下一條隔兩步的導數遞推關係（recurrence relation），由此逐一構造出麥克勞林（Maclaurin）係數。最後的和式看起來正是該級數在一個精心選取的 x 值處的取值。

解答

一階方程

兩邊乘開得 $y\sqrt{1-x^2} = \arcsin x$，然後兩邊對 x 求導，左邊用乘積法則（product rule）：

$$\sqrt{1-x^2}\,\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} - \frac{xy}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

全式乘以 $\sqrt{1-x^2}$（當 $|x| < 1$ 時不為零），得

$$(1-x^2)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} - xy - 1 = 0,$$

即為所求。

高階關係式

以 $y^{(k)}$ 表示 $\dfrac{\mathrm{d}^k y}{\mathrm{d}x^k}$。將一階方程求導 $n+1$ 次。常數 1 消失，而兩個乘積則由萊布尼茲法則處理。由於 $1-x^2$ 的各階導數依次為 $-2x$、-2，之後是 0，而 x 的導數依次為 1，之

後是 0，

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}^{n+1}}{\mathrm{d}x^{n+1}}\Big[(1-x^2)y'\Big] &= (1-x^2)y^{(n+2)} + \binom{n+1}{1}(-2x)\,y^{(n+1)} + \binom{n+1}{2}(-2)\,y^{(n)} \\ &= (1-x^2)y^{(n+2)} - 2(n+1)x\,y^{(n+1)} - n(n+1)\,y^{(n)},\end{aligned}$$

$$\frac{\mathrm{d}^{n+1}}{\mathrm{d}x^{n+1}}\Big[xy\Big] = x\,y^{(n+1)} + (n+1)\,y^{(n)}.$$

第一式減去第二式並合併同類項，

$$(1-x^2)y^{(n+2)} - (2(n+1)+1)x\,y^{(n+1)} - (n(n+1)+(n+1))y^{(n)} = 0,$$

即

$$(1-x^2)y^{(n+2)} - (2n+3)x\,y^{(n+1)} - (n+1)^2 y^{(n)} = 0.$$

以上推導並不需要 $n \geq 1$：只求導一次（$n = 0$）也得到同樣的模式 $(1-x^2)y'' - 3xy' - y = 0$，而我們稍後也會用到這個情況。

麥克勞林級數

代入 $x = 0$。中間一項帶有因子 x，因此消失，得

$$y^{(n+2)}(0) = (n+1)^2\,y^{(n)}(0) \qquad (n \geq 0).$$

這條遞推關係每次跨兩步，所以需要兩個初始值。由定義，$y(0) = \arcsin 0 = 0$；而一階方程在 $x = 0$ 處給出 $y'(0) - 0 - 1 = 0$，所以 $y'(0) = 1$。

想一想 怎樣只憑這兩個值得出每一階導數？

遞推關係只把 $y^{(n)}(0)$ 與 $y^{(n+2)}(0)$ 聯繫起來，所以偶數階導數組成一條由 $y(0)$ 開始的鏈，奇數階導數則組成另一條由 $y'(0)$ 開始的鏈。

*偶次冪。*由於 $y(0) = 0$，遞推關係給出 $y''(0) = 1^2 \cdot 0 = 0$，然後 $y^{(4)}(0) = 0$，如此類推：對每個 k 都有 $y^{(2k)}(0) = 0$。因此 x 的每個偶次冪的係數都是零。（這與 y 是奇函數（odd function）相符，因為它是奇函數 $\arcsin x$ 除以偶函數 $\sqrt{1-x^2}$ 的商。）

*奇次冪。*以 $n = 1, 3, \ldots, 2k-1$ 代入遞推關係，

$$y^{(2k+1)}(0) = (2k)^2(2k-2)^2 \cdots 4^2 \cdot 2^2 \cdot y'(0) = (2 \cdot 4 \cdots 2k)^2 = (2^k\,k!)^2,$$

這對 $k = 0$ 亦成立。除以 $(2k+1)!$ 便得到麥克勞林係數：

$$\frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^{2k}(k!)^2}{(2k+1)!}\,x^{2k+1} = x + \frac{2^2}{3!}x^3 + \frac{2^2 \cdot 4^2}{5!}x^5 + \cdots,$$

所以一般奇次項為 $\dfrac{2^{2k}(k!)^2}{(2k+1)!}x^{2k+1}$，而一般偶次項為 $0 \cdot x^{2k}$。

無窮級數之和

和式的第 n 項是 $\dfrac{(n!)^2}{(2n+1)!}$，其中 $n=0$ 給出首項 1。與級數比較，我們想消去因子 2^{2n}，所以選取 x 使 $2^{2n}x^{2n+1}$ 為 1 的常數倍：$x=\frac{1}{2}$ 給出 $2^{2n}(\frac{1}{2})^{2n+1}=\frac{1}{2}$。因此

$$\frac{\arcsin\frac{1}{2}}{\sqrt{1-\frac{1}{4}}}=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n!)^2}{(2n+1)!}.$$

左邊等於 $\dfrac{\pi/6}{\sqrt{3}/2}=\dfrac{\pi}{3\sqrt{3}}$，所以

$$1+\frac{1}{3!}+\frac{2^2}{5!}+\frac{2^2\times 3^2}{7!}+\cdots=\frac{2\pi}{3\sqrt{3}}=\frac{2\sqrt{3}\,\pi}{9}.$$

驗算

- 將已知級數 $\arcsin x=x+\frac{1}{6}x^3+\cdots$ 乘以 $(1-x^2)^{-1/2}=1+\frac{1}{2}x^2+\cdots$，得 $x+\left(\frac{1}{6}+\frac{1}{2}\right)x^3+\cdots=x+\frac{2}{3}x^3+\cdots$，而 $\frac{2^2}{3!}=\frac{2}{3}$ 果然吻合。
- 和式的首五項為 $1+0.16667+0.03333+0.00714+0.00159\approx 1.2087$，已經接近 $\frac{2\pi}{3\sqrt{3}}\approx 1.20920$；各項每次大約縮小 4 倍，所以餘項很小。

常見錯誤

- 在萊布尼茲法則中漏掉 $y^{(n)}$ 項上的二項式係數（binomial coefficient）$\binom{n+1}{2}$，以致得不出 $(n+1)^2$。
- 只對 $n\geq 1$ 使用遞推關係，因而始終沒有證明 $y''(0)=0$；偶數鏈需要 $n=0$（求導一次）的情況。
- 在最後一部分代入 $x=1$ 或 $x=\frac{1}{4}$：因子 2^{2n} 必須由 x^{2n} 抵消，這迫使 $x=\frac{1}{2}$。

STEP 之外

這裏我們「忽略了收斂性的問題」，但大學第一門分析課會把這點嚴格化：由比值審斂法（ratio test）可知該級數的收斂半徑（radius of convergence）為 1，而帶餘項的泰勒定理（Taylor's theorem with remainder）則證明在該區間內級數確實等於該函數。係數 $\frac{2^{2k}(k!)^2}{(2k+1)!}$ 與中心二項式係數（central binomial coefficients）關係密切，而同一個函數積分一次後便可生成 $(\arcsin x)^2$ 的級數。關於冪級數背後的分析，可參閱 Abbott 的 *Understanding Analysis*（《理解分析》）。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。