詳細解答

# STEP III 2013，第 13 題

概率與統計 • 矩與分佈函數

**STEP III 2013，第 13 題**

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

step.maths.org/questions/13-s3-q13

## 關鍵思路

由於 $\mathrm{F}' = \mathrm{f}$，表達式 $2\mathrm{F}(x)\mathrm{f}(x)$ 正是 $(\mathrm{F}(x))^2$ 的導數（derivative）。因此第 (i)(b) 部分只需一次分部積分（integration by parts）；而只要適當選取 g，關於 $Y$ 的每個問題都能化為關於 $X$ 的問題。至於各個界（bound），則來自把 f 或 F 換成第 (i)(a) 部分中較大的量 $M$ 或 $Mx$，而每次替換都朝着令積分變大的方向進行。

## 解答

全文中，$\mathrm{F}(x) = \int_0^x \mathrm{f}(t)\,\mathrm{d}t$，故 $\mathrm{F}'(x) = \mathrm{f}(x)$；又由於 $X$ 取值於 $[0,1]$，有 $\mathrm{F}(0) = 0$ 及 $\mathrm{F}(1) = 1$。

### 第 (i) 部分

**(a)** 對 $0 \le x \le 1$，由於對每個 $t$ 都有 $0 \le \mathrm{f}(t) \le M$，

$$0 \le \int_0^x \mathrm{f}(t)\,\mathrm{d}t \le \int_0^x M\,\mathrm{d}t = Mx,$$

即 $0 \le \mathrm{F}(x) \le Mx$。

**(b)** 由鏈式法則（chain rule），$\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\mathrm{F}(x))^2 = 2\mathrm{F}(x)\mathrm{f}(x)$。取 $u = \mathrm{g}(x)$ 及 $\mathrm{d}v = 2\mathrm{F}(x)\mathrm{f}(x)\,\mathrm{d}x$ 進行分部積分，於是 $v = (\mathrm{F}(x))^2$，

$$\begin{aligned}\int_0^1 2\mathrm{g}(x)\mathrm{F}(x)\mathrm{f}(x)\,\mathrm{d}x &= \Big[\mathrm{g}(x)(\mathrm{F}(x))^2\Big]_0^1 - \int_0^1 \mathrm{g}'(x)(\mathrm{F}(x))^2\,\mathrm{d}x \\ &= \mathrm{g}(1) - \int_0^1 \mathrm{g}'(x)(\mathrm{F}(x))^2\,\mathrm{d}x,\end{aligned}$$

因為 $\mathrm{F}(1) = 1$ 且 $\mathrm{F}(0) = 0$。（這裏需要 g 可微（differentiable），題目已隱含此假設。）

**第 (ii) 部分**

**(a)** $Y$ 的概率密度函數（probability density function）的積分必須等於 1。在 (i)(b) 中取 $\mathrm{g}(x) = 1$，使 $\mathrm{g}' = 0$，得

$$\int_0^1 2\mathrm{F}(y)\mathrm{f}(y)\,\mathrm{d}y = 1,$$

故 $k = 2$。（亦可直接計算：$\int_0^1 k\mathrm{Ff}\,\mathrm{d}y = \frac{k}{2}[\mathrm{F}^2]_0^1 = \frac{k}{2}$。）另請注意 $k\mathrm{Ff} \geq 0$，所以這確實是一個概率密度函數。

**(b)** 我們有

$$\mathrm{E}(Y^n) = \int_0^1 2y^n\,\mathrm{F}(y)\mathrm{f}(y)\,\mathrm{d}y.$$

上界。由 (i)(a)，$\mathrm{F}(y) \leq My$，而其餘因子 $2y^n\mathrm{f}(y)$ 均非負，所以

$$\mathrm{E}(Y^n) \leq \int_0^1 2y^n \cdot My \cdot \mathrm{f}(y)\,\mathrm{d}y = 2M\int_0^1 y^{n+1}\mathrm{f}(y)\,\mathrm{d}y = 2M\mu_{n+1}.$$

下界。現在在 (i)(b) 中取 $\mathrm{g}(y) = y^n$，於是 $\mathrm{g}(1) = 1$ 及 $\mathrm{g}'(y) = ny^{n-1}$：

$$\mathrm{E}(Y^n) = 1 - \int_0^1 ny^{n-1}(\mathrm{F}(y))^2\,\mathrm{d}y.$$

（當 $n = 0$ 時，該積分就是 0。）要求 $\mathrm{E}(Y^n)$ 的下界，我們需要求這個積分的上界。

> **想一想** $(\mathrm{F}(y))^2$ 的兩個因子中，應該把哪一個換成 $My$？

只換其中一個。由於 $0 \leq \mathrm{F}(y) \leq My$，有 $(\mathrm{F}(y))^2 \leq My\,\mathrm{F}(y)$，加上 $ny^{n-1} \geq 0$，所以

$$\int_0^1 ny^{n-1}(\mathrm{F}(y))^2\,\mathrm{d}y \leq nM\int_0^1 y^n\mathrm{F}(y)\,\mathrm{d}y.$$

若把兩個因子都換掉，就只剩下 $\int y^{n+1}\,\mathrm{d}y$，對 $X$ 毫無資訊；保留一個 F，便可再做一次分部積分，得出 $X$ 的一個矩（moment）。取 $u = \mathrm{F}(y)$ 及 $\mathrm{d}v = y^n\,\mathrm{d}y$ 進行分部積分，

$$\int_0^1 y^n\mathrm{F}(y)\,\mathrm{d}y = \Big[\frac{y^{n+1}}{n+1}\mathrm{F}(y)\Big]_0^1 - \int_0^1 \frac{y^{n+1}}{n+1}\mathrm{f}(y)\,\mathrm{d}y = \frac{1-\mu_{n+1}}{n+1}.$$

綜合以上，

$$\mathrm{E}(Y^n) \geq 1 - \frac{nM}{n+1}(1-\mu_{n+1}) = 1 + \frac{nM}{n+1}\mu_{n+1} - \frac{nM}{n+1},$$

連同上界，便是所求的一對不等式（inequality）。

**(c)** 把 (b) 的兩端結合起來，對 $n \geq 0$，

$$1 + \frac{nM}{n+1}\mu_{n+1} - \frac{nM}{n+1} \leq 2M\mu_{n+1},$$

再把含 $\mu_{n+1}$ 的項移到右邊，

$$1 - \frac{nM}{n+1} \leq \left(2M - \frac{nM}{n+1}\right)\mu_{n+1} = \frac{(n+2)M}{n+1}\,\mu_{n+1}.$$

係數 $\frac{(n+2)M}{n+1}$ 為正（$M > 0$，因為 f 的積分等於 1），所以可以除以它而不改變不等號方向：

$$\mu_{n+1} \geq \frac{n+1}{(n+2)M} - \frac{n}{n+2}.$$

此式對每個 $n \geq 0$ 成立。令 $m = n+1$，則 $m \geq 1$，上式變為

$$\mu_m \geq \frac{m}{(m+1)M} - \frac{m-1}{m+1} \qquad (m \geq 1),$$

這正是所求結果（只需把 $m$ 改名為 $n$）。

## 驗算

- 均勻分佈（uniform distribution）的 $X$：$\mathrm{f} = 1$，$M = 1$，$\mu_n = \frac{1}{n+1}$。(c) 中的界為 $\frac{n}{n+1} - \frac{n-1}{n+1} = \frac{1}{n+1}$，所以等號成立。此時 $Y$ 的概率密度函數為 $2y$，且 $\mathrm{E}(Y^n) = \frac{2}{n+2}$，而 (b) 中的兩個界亦都等於 $\frac{2}{n+2}$。這是合理的：我們用過的每一個不等式 $\mathrm{F}(y) \leq My$，對均勻分佈而言都是等式。
- $\mathrm{f}(x) = 3x^2$，$M = 3$，$n = 2$：$\mu_2 = \frac{3}{5}$，而界為 $\frac{2}{9} - \frac{1}{3} < 0$，輕鬆成立。對這個概率密度函數，$\mathrm{E}(Y^2) = \frac{3}{4}$ 及 $\mu_3 = \frac{1}{2}$，所以 (b) 中的界為 $1 + 2\cdot\frac{1}{2} - 2 = 0$ 及 $2\cdot 3\cdot\frac{1}{2} = 3$，而 $\frac{3}{4}$ 確實介乎兩者之間。
- 我們亦以數值積分，對多個概率密度函數及多種 g 的選擇，驗證了 (i)(b) 中的恆等式及所有不等式。

## 常見錯誤

- 以 $M^2y^2$ 作為 $\left(\mathrm{F}\right)^2$ 的上界：這雖然正確，卻毫無用處，因為它丟失了關於 $X$ 的所有資訊。

- 忘記 $\mathrm{E}(Y^n)$ 的表達式中積分前面帶有負號，所以要求 $\mathrm{E}(Y^n)$ 的下界，就需要積分的上界。
- 得出 $\mu_{n+1}$ 的界後便停下，沒有移動下標，以得出題目所述對 $n \geq 1$ 的形式。

## STEP 之外

概率密度函數 $2\mathrm{F}(y)\mathrm{f}(y)$ 並非偶然：它是 $X$ 的兩個獨立副本的 $\max(X_1, X_2)$ 的概率密度函數，因為 $\mathrm{P}(\max \leq y) = \big(\mathrm{F}(y)\big)^2$。更一般地，$n$ 個獨立觀測值中第 $r$ 小者的概率密度函數，由 F 和 $1 - \mathrm{F}$ 的冪組成；這些順序統計量（order statistics）是無母數統計（non-parametric statistics）的核心。Blitzstein 與 Hwang 的 *Introduction to Probability*（《概率導論》）對順序統計量有清晰的講解。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。