詳細解答

STEP III 2013，第 11 題

力學 • 彈簧與能量

> **STEP III 2013，第 11 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/13-s3-q11

關鍵思路

一切都由對稱性（symmetry）決定：三角形保持水平，其中心一直位於懸掛點的正下方，而且只能上下移動。因此只需考慮一個質點和一條彈簧，便能掌握整個情況。經過一條彈簧的鉛垂平面上的幾何關係，給出彈簧長度關於 θ 的表達式。沿鉛垂方向分解力可得平衡（equilibrium）條件，而能量守恆（conservation of energy）（彈性勢能、重力勢能和動能）則給出速率。

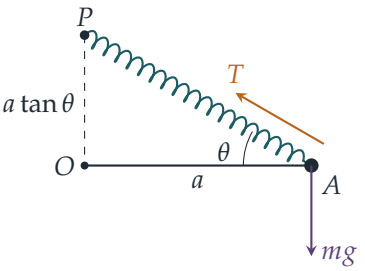
解答

模型與幾何

把各質量視為質點（particle），各桿視為輕而剛性，各彈簧視為輕彈簧並遵守胡克定律（Hooke's law）。設 P 為懸掛點，O 為三角形的中心，位於 P 的正下方。邊長為 s 的等邊三角形，其中心到頂點的距離為 $s/\sqrt{3}$，所以每個頂點與 O 的水平距離為

$$OA = \frac{\sqrt{3}a}{\sqrt{3}} = a$$

取一個頂點 A，考慮經過 P、O 和 A 的鉛垂平面：



彈簧 PA 與水平線 OA 成角 θ，所以彈簧長度為 $a/\cos\theta$，而 A 位於 P 下方 $a\tan\theta$ 的深度。

張力

每條彈簧的伸長量（extension）為

$$x = \frac{a}{\cos\theta} - a = \frac{a(1-\cos\theta)}{\cos\theta},$$

因此由胡克定律，配合彈性模量（modulus）kmg 和自然長度（natural length）a，得

$$T = \frac{kmg}{a}\,x = \frac{kmg(1-\cos\theta)}{\cos\theta},$$

即所求結果。

$\theta = \frac{1}{6}\pi$ 時的平衡

作用於 A 處質點的力包括其重量、沿 AP 方向的彈簧張力（tension），以及兩條桿施加的力。各桿位於水平面內，所以桿的作用力是水平的。

> ? **想一想** 為甚麼可以不理會桿的作用力？

我們沿鉛垂方向分解，而桿的作用力沒有鉛垂分量。（在水平方向上，張力分量 $T\cos\theta$ 由桿的作用力平衡，這正是需要桿的原因，但我們用不着這條方程。）在 A 處沿鉛垂方向分解：

$$T\sin\theta = mg \quad\Longrightarrow\quad k(1-\cos\theta)\tan\theta = 1.$$

當 $\theta = \frac{1}{6}\pi$ 時，$\cos\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$，$\tan\theta = \frac{1}{\sqrt{3}}$，所以

$$k\cdot\frac{2-\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{3}} = 1 \quad\Longrightarrow\quad k = \frac{2\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}(2+\sqrt{3})}{(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})} = 4\sqrt{3}+6,$$

因為 $(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3}) = 1$。這就是所求的值。

在平衡位置時的速率

由對稱性，三角形保持水平，中心位於 P 的正下方，所以三個質點都以相同速率作鉛垂運動。除重力和彈簧外，沒有其他外力做功，所以能量守恆。伸長量為 x 的彈簧所儲存的彈性勢能為 $kmg\,x^2/(2a)$。

起始位置（$\theta = \frac{1}{3}\pi$，靜止）。此時 $\cos\theta = \frac{1}{2}$，所以伸長量為 $x_1 = a$，而在 P 下方的深度為 $a\tan\frac{1}{3}\pi = \sqrt{3}a$。

平衡位置（$\theta = \frac{1}{6}\pi$）。伸長量為

$$x_2 = a\left(\frac{2}{\sqrt{3}} - 1\right) = \frac{a(2-\sqrt{3})}{\sqrt{3}}, \qquad x_2^2 = \frac{a^2(7-4\sqrt{3})}{3},$$

深度為 $a\tan\frac{1}{6}\pi = \frac{a}{\sqrt{3}}$。所以每個質點上升了

$$\sqrt{3}a - \frac{a}{\sqrt{3}} = \frac{2a}{\sqrt{3}}.$$

三條彈簧釋放的彈性勢能：

$$\begin{aligned} 3\cdot\frac{kmg}{2a}\left(x_1^2 - x_2^2\right) &= \frac{3kmg}{2a}\cdot\frac{a^2(3-7+4\sqrt{3})}{3} \\ &= 2kmga(\sqrt{3}-1). \end{aligned}$$

由於 $k = 4\sqrt{3}+6$，$k(\sqrt{3}-1) = 12-4\sqrt{3}+6\sqrt{3}-6 = 6+2\sqrt{3}$，所以釋放的彈性勢能為 $4mga(3+\sqrt{3})$。

三個質點增加的重力勢能：$3mg\cdot\dfrac{2a}{\sqrt{3}} = 2\sqrt{3}\,mga$。

兩者之差轉化為三個質點的動能，每個質點的速率均為 V：

$$\begin{aligned} \tfrac{3}{2}mV^2 &= 4mga(3+\sqrt{3}) - 2\sqrt{3}\,mga = mga\left(12+2\sqrt{3}\right), \\ V^2 &= \frac{2ag}{3}\left(12+2\sqrt{3}\right) = \frac{4ag}{3}\left(6+\sqrt{3}\right), \end{aligned}$$

即所求結果。

驗算

- 正負號：在 $\theta = \frac{1}{3}\pi$ 時，每條彈簧的鉛垂拉力為 $T\sin\theta = kmg\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} \approx 11.2\,mg > mg$，所以三角形起初確實是向上朝平衡位置移動，與能量方程的假設一致。
- 答案為正數，而且具有速率平方的單位（ag）。
- 取 $a = 1.3\,\mathrm{m}$ 及 $g = 9.81\,\mathrm{m\,s^{-2}}$，由 $\theta = \frac{1}{3}\pi$ 的靜止狀態出發，以數值方法逐步推進運動方程 $\ddot{y} = g - \frac{T}{m}\sin\theta$，在 $\theta = \frac{1}{6}\pi$ 時得 $V^2 \approx 131.48\,\mathrm{m^2\,s^{-2}}$，與 $\frac{4ag}{3}(6+\sqrt{3})$ 吻合。

常見錯誤

- 把中心到頂點的距離誤當作 $\sqrt{3}a$ 或 $\frac{\sqrt{3}}{2}a$，而不是 a。
- 忘記共有三條彈簧和三個質點：因數 3 同時出現在彈性勢能、重力勢能和動能各項中。
- 弄錯運動方向：質點在兩個位置之間是上升的，所以重力勢能是增加，而不是減少。

STEP 之外

在這裏，三角形只有一個自由度(degree of freedom)，因為對稱性排除了所有其他運動。選取單一坐標（這裏是 θ，或深度 y），並以它表示能量，正是拉格朗日力學（Lagrangian mechanics）的起點。把勢能在平衡位置附近展開，還可以求得微小鉛垂振動的週期。Kleppner 和 Kolenkow 所著的 *An Introduction to Mechanics*（《力學導論》）便是本着這種精神，發展能量方法和小振動（small oscillations）的理論。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。