詳細解答

STEP III 2013，第 10 題

力學 • 轉動撞擊

STEP III 2013，第 10 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

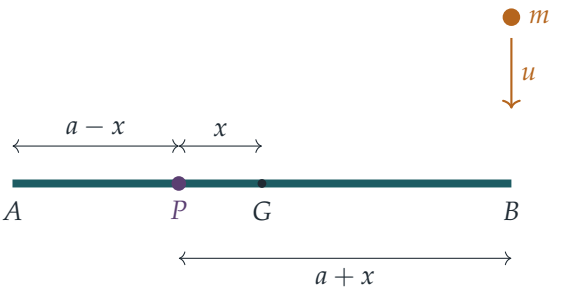
step.maths.org/questions/13-s3-q10

關鍵思路

只要留意到桿的中點與 P 相距多遠，轉動慣量（moment of inertia）便可直接由平行軸定理（parallel axis theorem）得出。至於撞擊，轉軸會對桿施加一個大小未知的衝量（impulse），因此線動量（linear momentum）並不守恆；但該衝量作用於 P，所以它對 P 的力矩為零。對 P 的角動量守恆（conservation of angular momentum），再加上在 B 處應用牛頓（Newton）實驗定律（Newton's experimental law），便得到兩條方程，足以求出兩個未知量。

解答

我們把桿視為均勻剛性桿，把質點視為質點，並假設撞擊在瞬間完成，因此唯一的水平衝量來自 B 處和轉軸處（重力等有限大小的力在撞擊的一瞬間不產生衝量）。



轉動慣量

設 G 為桿的中點，即其質心（centre of mass）。由於 $AG = a$ 及 $AP = a - x$，距離 PG 為 x（當 $x > 0$ 時，G 位於 P 靠 B 的一側）。均勻桿對通過其中心的垂直軸的轉動慣量為 $\frac{1}{3}Ma^2$（桿長為 $2a$）。由平行軸定理，

$$I_P = \tfrac{1}{3}Ma^2 + Mx^2 = \tfrac{1}{3}M(a^2 + 3x^2),$$

與所求相符。

如果你喜歡從基本原理出發：線密度（line density）為 $M/(2a)$，以 s 表示沿桿從 P 量起的距離，則桿由 $s = -(a - x)$ 延伸至 $s = a + x$，而

$$I_P = \frac{M}{2a}\int_{-(a-x)}^{a+x} s^2\,\mathrm{d}s = \frac{M}{6a}[(a+x)^3 + (a-x)^3] = \frac{M}{6a}(2a^3 + 6ax^2),$$

結果相同。

撞擊

由 P 到 B 的距離為 $2a - (a - x) = a + x$。設 v 為質點在撞擊後瞬間的速度（以原來的運動方向為正），ω 為桿的角速度（angular velocity），於是 B 此時以速率 $(a + x)\omega$ 沿同一方向運動。

> **想一想** 為甚麼這裏不能用線動量守恆？

因為轉軸是固定的，它在碰撞期間對桿施加一個大小未知的衝量。該衝量作用於 P，所以它對 P 的力矩為零。質點與桿之間的衝量是桿與質點所組成系統的內部衝量。因此，系統對 P 的總角動量守恆：

$$mu(a + x) = mv(a + x) + I_P\,\omega. \tag{1}$$

在 B 處應用牛頓實驗定律（分離速率等於 e 乘以接近速率），得

$$(a + x)\omega - v = eu. \tag{2}$$

由 (2)，$v = (a + x)\omega - eu$。代入 (1)，

$$\begin{aligned} mu(a + x) &= m(a + x)[(a + x)\omega - eu] + I_P\,\omega \\ mu(1 + e)(a + x) &= [m(a + x)^2 + \tfrac{1}{3}M(a^2 + 3x^2)]\omega. \end{aligned}$$

兩邊乘以 3，

$$\omega = \frac{3mu(1 + e)(a + x)}{M(a^2 + 3x^2) + 3m(a + x)^2},$$

即題目所給的結果。

$m = 2M$ 的情況

代入 $m = 2M$ 並約去 M：

$$\omega = \frac{6u(1+e)(a+x)}{a^2+3x^2+6(a+x)^2}.$$

自然出現的變量是力臂（lever arm）$s = a + x$，即距離 PB，它的取值範圍是 $[0, 2a]$。以 $x = s - a$ 代入，分母為

$$a^2 + 3(s-a)^2 + 6s^2 = 9s^2 - 6as + 4a^2,$$

所以

$$\omega = \frac{6u(1+e)\,s}{9s^2 - 6as + 4a^2}.$$

當 $s = 0$（轉軸位於 B）時 $\omega = 0$，所以最大值出現在 $s > 0$ 處，此時可把分子分母同除以 s：

$$\omega = \frac{6u(1+e)}{9s + \dfrac{4a^2}{s} - 6a}.$$

我們要令分母盡可能小。由於 $s > 0$，算術—幾何平均不等式（AM–GM inequality）給出

$$9s + \frac{4a^2}{s} \;\geq\; 2\sqrt{9s \cdot \frac{4a^2}{s}} = 12a,$$

等號成立當且僅當 $9s = 4a^2/s$，即 $s = \frac{2}{3}a$，而這確實落在 $(0, 2a]$ 之內。因此分母至少為 $12a - 6a = 6a$，且只在 $s = \frac{2}{3}a$ 時取等號，故

$$\omega \leq \frac{6u(1+e)}{6a} = \frac{u(1+e)}{a}.$$

所以最大角速度為 $u(1+e)/a$，在 $a + x = \frac{2}{3}a$ 時達到，即

$$x = -\tfrac{1}{3}a.$$

負號只是表示 P 位於中點靠 B 的一側：P 與 A 相距 $\frac{4}{3}a$，與 B 相距 $\frac{2}{3}a$。

驗算

- 當 $x = a$（轉軸位於 A）且 $e = 1$ 時，公式給出 $\omega = 3mu/\big(a(M+3m)\big)$；令 $M \to 0$，得 $\omega = u/a$，於是 B 以 $2u$ 運動，這正是極輕的「靶子」受彈性撞擊時大家熟悉的結果。
- 在最佳情況下取 $a = 1$、$u = 1$、$e = \frac{1}{2}$，桿以 $\omega = 1.5$ 轉動，所以 B 以 1 運動，而質點在撞擊後的速度為 $v = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$。此時對 P 的角動量為 $2M \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} + \frac{1}{3}M\big(1+\frac{1}{3}\big) \cdot 1.5 = \frac{4}{3}M$，與撞擊前的 $2M \cdot 1 \cdot \frac{2}{3}$ 相符。
- 以電腦在 $x \in [-a, a]$ 上作細密搜尋，確認最大值出現在 $x = -a/3$。

常見錯誤

- 使用線動量守恆：固定的轉軸會產生衝量，所以只有對 P 的角動量守恆。
- 把距離 PB 當作 $a - x$ 或 $2a - x$，而不是 $a + x$。
- 因 $x = -\frac{1}{3}a$ 是負數而捨棄它：x 是帶正負號的位置，任何 $[-a, a]$ 內的 x 都會使 P 落在桿上。

STEP 之外

選擇適當的點來取力矩，使未知的反作用力消去，是剛體動力學（rigid-body dynamics）中最有用的技巧之一；它在「撞擊中心」（centre of percussion）中再次出現——那是球棒或桿上的一點，打擊該點時，支點處不會產生衝量。大學一年級的力學會把這發展成角動量和慣性張量（inertia tensor）的一般理論。Kleppner 與 Kolenkow 的 *An Introduction to Mechanics*（《力學導論》）對衝擊性轉動和撞擊中心有非常清晰的論述。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。