詳細解答

STEP III 2013，第 1 題

純數學 • 半角代換

> **STEP III 2013，第 1 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/13-s3-q1

關鍵思路

半角代換（half-angle substitution）$t = \tan\frac{1}{2}x$ 可把任何 $\sin x$ 的有理函數（rational function）化為 t 的有理函數，因此第一個積分會變成 $\int \mathrm{d}t/(\text{二次式})$，再用配方法（completing the square)即可完成。要把答案寫成題目要求的形式，則需要用到 $\tan(A-B)$ 公式。至於 I_n，提示的設計正是要令那個麻煩的分母約去：$\sin^{n+1}x + 2\sin^n x = \sin^n x\,(2+\sin x)$。由此得到一條遞推關係（recurrence），從 I_0 開始逐級往上推；而 I_0 是唯一真正需要用到第一部分結果的積分。

解答

代換

設 $t = \tan\frac{1}{2}x$，由連鎖法則（chain rule）得

$$\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x} = \tfrac{1}{2}\sec^2\tfrac{1}{2}x = \tfrac{1}{2}(1+\tan^2\tfrac{1}{2}x) = \tfrac{1}{2}(1+t^2).$$

至於正弦，先用二倍角公式（double-angle formula），再寫成 $\cos^2\frac{1}{2}x = 1/\sec^2\frac{1}{2}x$：

$$\sin x = 2\sin\tfrac{1}{2}x\cos\tfrac{1}{2}x = 2\tan\tfrac{1}{2}x\cos^2\tfrac{1}{2}x = \frac{2\tan\frac{1}{2}x}{\sec^2\frac{1}{2}x} = \frac{2t}{1+t^2}.$$

兩個結果均已證明。

第一個積分

當 x 由 0 變到 $\frac{1}{2}\pi$ 時，t 由 $\tan 0 = 0$ 變到 $\tan\frac{1}{4}\pi = 1$，而且 $\mathrm{d}x = \dfrac{2\,\mathrm{d}t}{1+t^2}$。此外

$$1 + a\sin x = \frac{1 + t^2 + 2at}{1+t^2},$$

因此因子 $1+t^2$ 互相約去，得

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\mathrm{d}x}{1+a\sin x} = \int_0^1 \frac{2\,\mathrm{d}t}{t^2+2at+1} = \int_0^1 \frac{2\,\mathrm{d}t}{(t+a)^2+(1-a^2)}.$$

由於 $0 < a < 1$，常數 $1-a^2$ 為正；記 $r = \sqrt{1-a^2}$。利用 $\int \mathrm{d}u/(u^2+r^2) = \frac{1}{r}\arctan\frac{u}{r}$，

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\mathrm{d}x}{1+a\sin x} = \frac{2}{r}\Big[\arctan\frac{t+a}{r}\Big]_0^1 = \frac{2}{r}(\alpha-\beta),$$

其中

$$\tan\alpha = \frac{1+a}{r} = \frac{1+a}{\sqrt{1-a}\sqrt{1+a}} = \frac{\sqrt{1+a}}{\sqrt{1-a}}, \qquad \tan\beta = \frac{a}{r},$$

且 $\alpha, \beta \in (0, \frac{1}{2}\pi)$。

> **想一想** 這看來不像我們想要的答案。怎樣才能把兩個反正切之差化為一個反正切？

取差的正切。我們有

$$\tan\alpha - \tan\beta = \frac{(1+a)-a}{r} = \frac{1}{r}, \qquad 1 + \tan\alpha\tan\beta = 1 + \frac{a(1+a)}{1-a^2} = 1 + \frac{a}{1-a} = \frac{1}{1-a},$$

所以

$$\tan(\alpha-\beta) = \frac{\tan\alpha - \tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta} = \frac{1-a}{r} = \frac{1-a}{\sqrt{1-a}\sqrt{1+a}} = \frac{\sqrt{1-a}}{\sqrt{1+a}}.$$

在取反函數之前，我們需要 $\alpha-\beta$ 位於 arctan 的值域 $(-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi)$ 之內。事實確是如此：兩個角都在 $(0, \frac{1}{2}\pi)$ 內，而且 $\tan\alpha > \tan\beta$（兩者之差為 $1/r > 0$），所以 $0 < \alpha - \beta < \frac{1}{2}\pi$。因此 $\alpha - \beta = \arctan\dfrac{\sqrt{1-a}}{\sqrt{1+a}}$，並且

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\mathrm{d}x}{1+a\sin x} = \frac{2}{\sqrt{1-a^2}}\arctan\frac{\sqrt{1-a}}{\sqrt{1+a}},$$

此即所求。

計算 I_3

按照提示，

$$I_{n+1} + 2I_n = \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\sin^n x\,(\sin x + 2)}{2+\sin x}\,\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \sin^n x\,\mathrm{d}x.$$

我們需要右方在 $n = 0, 1, 2$ 時的值：

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} 1\,\mathrm{d}x = \tfrac{1}{2}\pi, \qquad \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \sin x\,\mathrm{d}x = 1, \qquad \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \sin^2 x\,\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \tfrac{1}{2}(1-\cos 2x)\,\mathrm{d}x = \tfrac{1}{4}\pi.$$

想一想 遞推關係把每個 I_n 與下一個聯繫起來，但它從哪裏開始？

我們需要另行求出 I_0，這正是第一部分派上用場的地方。提出因子 2 並取 $a = \frac{1}{2}$，

$$\begin{aligned} I_0 = \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\mathrm{d}x}{2+\sin x} &= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\mathrm{d}x}{1+\frac{1}{2}\sin x} = \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{\sqrt{3/4}} \arctan \frac{\sqrt{1/2}}{\sqrt{3/2}} \\ &= \frac{2}{\sqrt{3}} \arctan \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}}\cdot\frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{3\sqrt{3}}. \end{aligned}$$

現在沿遞推關係 $I_{n+1} = \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \sin^n x\,\mathrm{d}x - 2I_n$ 逐級往上推：

$$\begin{aligned} I_1 &= \tfrac{1}{2}\pi - 2I_0 = \frac{\pi}{2} - \frac{2\pi}{3\sqrt{3}}, \\ I_2 &= 1 - 2I_1 = 1 - \pi + \frac{4\pi}{3\sqrt{3}}, \\ I_3 &= \tfrac{1}{4}\pi - 2I_2 = \frac{\pi}{4} - 2 + 2\pi - \frac{8\pi}{3\sqrt{3}}. \end{aligned}$$

因此

$$I_3 = \frac{9\pi}{4} - \frac{8\sqrt{3}\,\pi}{9} - 2.$$

驗算

- 當 $a \to 0$ 時，第一個結果應給出 $\int_0^{\frac{1}{2}\pi} 1\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\pi$；它的確趨向 $2\arctan 1 = \frac{1}{2}\pi$。
- 由於在 $[0, \frac{1}{2}\pi]$ 上 $0 \le \sin^3 x/(2+\sin x) \le \frac{1}{3}$，我們需要 $0 < I_3 < \frac{1}{6}\pi \approx 0.52$。我們的答案是 $I_3 \approx 0.2318$，而 I_3 的數值積分結果與之在許多位小數上吻合。同樣，$I_0 = \pi/(3\sqrt{3}) \approx 0.6046$，它理應介乎 $\frac{\pi}{6}$ 與 $\frac{\pi}{4}$ 之間，事實亦然。
- 各值遞減，$I_0 > I_1 > I_2 > I_3 > 0$，這是應有的結果，因為在該區間上 $0 \le \sin x \le 1$。

常見錯誤

- 忘記把積分上下限改為 $t = 0$ 和 $t = 1$，或忘記 $\mathrm{d}x$ 帶來的因子 $2/(1+t^2)$。
- 用 $\tan(\alpha - \beta)$ 推斷 $\alpha - \beta = \arctan(\dots)$，卻沒有檢查 $\alpha - \beta$ 是否位於 $(-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi)$ 之內。

▶ 以 $a = 2$ 把第一個結果套用於 I_0：該結果只在 $0 < a < 1$ 時成立，所以必須先提出因子 2。

STEP 之外

$t = \tan\frac{1}{2}x$ 代換（常稱為魏爾斯特拉斯代換（Weierstrass substitution））說明了每個 $\sin x$ 與 $\cos x$ 的有理函數都有初等的原函數（antiderivative），因為部分分式（partial fractions）可以處理任何 t 的有理函數。從幾何角度看，它就是單位圓的球極投影參數化（stereographic parametrisation），$(\cos x, \sin x) = \left(\frac{1-t^2}{1+t^2}, \frac{2t}{1+t^2}\right)$，而由有理數 t 出發，它亦能產生所有畢氏三元數組（Pythagorean triple）。像 $\int_0^{2\pi} \mathrm{d}x/(1 + a\sin x)$ 這類積分，亦是複分析（complex analysis）中圍道積分（contour integration）的經典入門應用；Needham 的 *Visual Complex Analysis*（《直觀複分析》）是理解箇中原因的絕佳讀物。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。