詳細解答

STEP II 2013，第 9 題

力學 • 平衡中的摩擦力

> **STEP II 2013，第 9 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/13-s2-q9

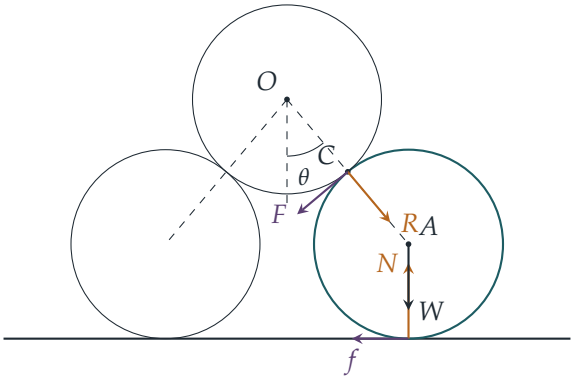
關鍵思路

大部分工作都由對稱性（symmetry）完成。把三個圓盤當作一個整體系統，立即就能得出地面的反作用力。然後對其中一個底部圓盤的圓心取力矩（moments）：地面的摩擦力（friction）和頂部圓盤施加的摩擦力都沿切線（tangent）方向作用，因此兩者的力臂（lever arm）相同（都是半徑），大小必然相等。知道這一點後，分別對底部圓盤和頂部圓盤分解力（resolving forces），便得到兩條方程，可解出兩個未知數。

解答

我們把各圓盤視為全同的均勻剛體（rigid body）圓盤，半徑為 r，重量各為 W，全部位於同一鉛直平面內。設 O 為頂部圓盤的圓心，A 為右邊底部圓盤的圓心，則 $OA = 2r$，且 OA 與向下的鉛直線成角 θ。這兩個圓盤的接觸點 C 是 OA 的中點。

由左右對稱可知，左邊底部圓盤所受的力與右邊圓盤所受的力互為鏡像，所以我們只需處理右邊的圓盤。在 C 點，右邊圓盤受到沿 OA 方向的法向反作用力（normal reaction）R（把它推離 O），以及沿公切線方向的摩擦力 F。在地面上，它受到法向反作用力 N 和摩擦力 f。



圖中顯示右邊底部圓盤所受的力。根據牛頓（Newton）第三定律（Newton's third law），頂部圓盤在 C 點受到方向相反的 R 和 F，因此摩擦力沿切線把頂部圓盤向上及向外推。

第 (i) 部分

把三個圓盤合起來視為一個系統。圓盤之間的力是內力，會互相抵消，所以僅有的外力是三個重量和地面施加的力。由對稱性，兩個地面反作用力相等，而地面的摩擦力是水平的，因此鉛直方向分解力得

$$2N = 3W \quad \Longrightarrow \quad N = \tfrac{3}{2}W,$$

得證。

第 (ii) 部分

> **想一想** 底部圓盤上似乎有三個未知數 R、F 和 f。第三條方程從何而來？

來自力矩。對右邊底部圓盤關於 A 取力矩。重量 W、法向反作用力 N 和法向反作用力 R 都通過 A，所以沒有力矩。摩擦力 f 沿最低點的切線作用，F 沿 C 點的切線作用，所以兩者的力臂都是 r。它們必須使圓盤向相反方向轉動，因此

$$fr = Fr \quad \Longrightarrow \quad f = F.$$

（這也確定了圖中各力的方向。圓盤被向外推，所以 f 指向內，於是底部圓盤上的 F 必須沿切線指向下方及內側，才能平衡 f 的力矩。）

由 O 到 A 的單位向量是 $(\sin\theta, -\cos\theta)$，而底部圓盤上 F 的切線方向是 $(-\cos\theta, -\sin\theta)$。對底部圓盤水平方向分解力：

$$R\sin\theta - F\cos\theta - f = 0 \quad \Longrightarrow \quad R\sin\theta = F(1+\cos\theta),$$

其中用了 $f = F$。

對頂部圓盤而言，兩個接觸點提供相等的向上分量，各為 $R\cos\theta + F\sin\theta$。鉛直方向分解力：

$$2(R\cos\theta + F\sin\theta) = W.$$

代入 $F = \dfrac{R\sin\theta}{1+\cos\theta}$：

$$W = 2R\left(\cos\theta + \frac{\sin^2\theta}{1+\cos\theta}\right) = 2R\cdot\frac{\cos\theta+\cos^2\theta+\sin^2\theta}{1+\cos\theta} = 2R\cdot\frac{1+\cos\theta}{1+\cos\theta} = 2R.$$

所以兩個互相接觸的圓盤之間的法向反作用力是

$$R = \tfrac{1}{2}W,$$

且與 θ 無關。於是

$$F = \frac{R\sin\theta}{1+\cos\theta} = \frac{W\sin\theta}{2(1+\cos\theta)},$$

這就是所求的摩擦力。

作為一致性檢查，對底部圓盤鉛直方向分解力得 $N = W + R\cos\theta + F\sin\theta = W + \frac{1}{2}W = \frac{3}{2}W$，與第 (i) 部分吻合。

第 (iii) 部分

利用半角公式（half-angle formulae）$\sin\theta = 2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}$ 及 $1+\cos\theta = 2\cos^2\frac{\theta}{2}$，

$$\frac{F}{R} = \frac{\sin\theta}{1+\cos\theta} = \tan\tfrac{\theta}{2}.$$

要達到平衡 (equilibrium)，每個接觸點的摩擦力都不能超過其極限值 (limiting value)。在圓盤之間，這表示 $F \le \mu R$，即

$$\tan\tfrac{\theta}{2} \le \mu.$$

(在地面上，我們需要 $f \le \mu N$，即 $\frac{1}{2}W\tan\frac{\theta}{2} \le \frac{3}{2}\mu W$。這個條件較弱，所以起決定作用的是圓盤之間的接觸。)

> **想一想** 是甚麼阻止 θ 任意地小，從而令 $\tan\frac{\theta}{2}$ 變得極小？

兩個底部圓盤並不接觸。它們的圓心相距 $2\cdot 2r\sin\theta = 4r\sin\theta$，而這必須大於 $2r$，所以 $\sin\theta > \frac{1}{2}$。由於 $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$，這表示 $\theta > \frac{\pi}{6}$，所以 $\frac{\theta}{2} > \frac{\pi}{12}$。由於 tan 在 $(0, \frac{\pi}{2})$ 上遞增，

$$\tan\tfrac{\theta}{2} > \tan\tfrac{\pi}{12} = \tan(45^\circ - 30^\circ) = \frac{1-\frac{1}{\sqrt{3}}}{1+\frac{1}{\sqrt{3}}} = \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1} = \frac{(\sqrt{3}-1)^2}{2} = 2-\sqrt{3}.$$

所以平衡要求 $\mu \ge \tan\frac{\theta}{2} > 2-\sqrt{3}$。若 $\mu < 2-\sqrt{3}$，則沒有任何容許的 θ 值能滿足此條件，平衡不可能出現。

驗算

- 當 $\theta \to 0$ 時，頂部圓盤正正坐在其他圓盤之上，而 $F \to 0$：不需要摩擦力，與預期一致。
- 取任何樣本角度，例如 $\theta = 1$ 弧度，代入 $R = \frac{1}{2}W$、$F = f = \frac{1}{2}W\tan\frac{1}{2}$ 及 $N = \frac{3}{2}W$，每個圓盤的兩個力分量和力矩都平衡。
- $2 - \sqrt{3} \approx 0.2679$，與 $\tan 15^\circ \approx 0.2679$ 吻合。對略大於 30° 的 θ 作數值掃描，證實 $\mu = 0.2679$ 時平衡不可能，而 $\mu = 0.268$ 時平衡可能。

常見錯誤

- 假設圓盤之間的摩擦力為零，或完全忘記它。沒有它的話，底部圓盤的力矩方程會迫使 $f = 0$，那就沒有東西能阻止底部圓盤向兩邊滑開。
- 遺漏了底部圓盤互不接觸這個條件。它是唯一給 θ 設下限的條件，因此 $2 - \sqrt{3}$ 正是由此而來。
- 弄錯 F 的方向。應利用關於 A 的力矩方程來確定方向，而不是靠猜。

STEP 之外

這個問題之所以是靜定(statically determinate)的，全靠對稱性和力矩方程；在許多由粗糙物體堆疊而成的情況中，單憑平衡條件無法求出摩擦力，工程師需要為物體的形變建立模型。簡潔的結果 $F/R = \tan\frac{\theta}{2}$ 是摩擦角（friction angle）概念的一個例子：當且僅當總接觸力與法線所成的角不超過 $\arctan\mu$ 時，平衡才可能出現。Kleppner 和 Kolenkow 的 *An Introduction to Mechanics*（《力學導論》）在大學一年級程度上仔細討論了摩擦力和剛體靜力學。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。