詳細解答

STEP II 2013，第 8 題

純數學 • 微積分與不等式

STEP II 2013，第 8 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

step.maths.org/questions/13-s2-q8

關鍵思路

由於 f 是遞減（decreasing）函數，這個區域是一道越往右越低的「樓梯」，所以最佳的矩形會位於左下角：底邊在直線 $y = \mathrm{f}(t)$ 上，左邊貼着 y 軸，而右上角落在曲線上。這樣第 (i) 部分就化為求單變量函數的最大值（maximum）。第 (ii) 部分比較兩個面積，即整個區域與其內的矩形；而第 (iii) 部分只是把 $\mathrm{f}(x) = 1/(1+x)$ 代入，把一切具體算出來。

解答

第 (i) 部分

該區域是 $\{(x,y) : 0 \le x \le t,\ \mathrm{f}(t) \le y \le \mathrm{f}(x)\}$：由於 f 遞減，當 $x < t$ 時曲線位於直線 $y = \mathrm{f}(t)$ 之上。

取區域內任意一個矩形 $[a,b] \times [c,d]$。它的底邊必須滿足 $c \ge \mathrm{f}(t)$，左邊滿足 $a \ge 0$，而右上角 (b,d) 必須在區域內，所以 $b \le t$ 及 $d \le \mathrm{f}(b)$。因此其面積至多為

$$b(\mathrm{f}(b) - \mathrm{f}(t)),$$

而矩形 $[0,b] \times [\mathrm{f}(t), \mathrm{f}(b)]$ 正好達到這個面積，並且確實放得進區域：對於 $0 \le x \le b$，有 $\mathrm{f}(x) \ge \mathrm{f}(b)$，所以該矩形位於曲線之下。於是

$$A_0(t) = \max_{0 \le x \le t} R(x), \qquad R(x) = x(\mathrm{f}(x) - \mathrm{f}(t)).$$

由於 $R(0) = R(t) = 0$，而對於 $0 < x < t$ 有 $R(x) > 0$，所以當 $t > 0$ 時，最大值在某個內點 $x_0 \in (0,t)$ 取得，而該點滿足 $R'(x_0) = 0$：

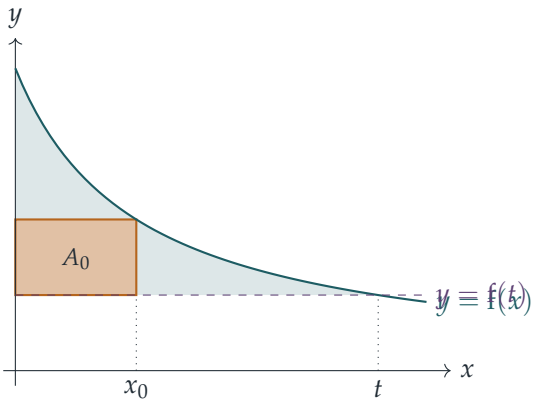
$$R'(x) = \mathrm{f}(x) + x\mathrm{f}'(x) - \mathrm{f}(t) = 0 \quad \Longrightarrow \quad x_0\mathrm{f}'(x_0) + \mathrm{f}(x_0) = \mathrm{f}(t).$$

因此 $A_0(t) = x_0(\mathrm{f}(x_0) - \mathrm{f}(t))$，其中 x_0 滿足上述條件，得證。（當 $t = 0$ 時，區域沒有寬度，$A_0(0) = 0$，而 $x_0 = 0$ 顯然滿足該條件。）

第 (ii) 部分

記 $t\,\mathrm{g}(t) = \displaystyle\int_0^t \mathrm{f}(x)\,\mathrm{d}x$。兩邊求導，左邊用乘積法則（product rule），右邊用微積分基本定理（fundamental theorem of calculus），得

$$\mathrm{g}(t) + t\,\mathrm{g}'(t) = \mathrm{f}(t) \quad \Longrightarrow \quad t\,\mathrm{g}'(t) = \mathrm{f}(t) - \mathrm{g}(t).$$



積分 $\int_0^t \big(\mathrm{f}(x) - \mathrm{f}(t)\big)\,\mathrm{d}x$ 正是陰影區域的面積，即 $0 \le x \le t$ 範圍內曲線與直線 $y = \mathrm{f}(t)$ 之間的面積。第 (i) 部分的最佳矩形位於這個區域之內，但並未填滿它：當 $x_0 < x < t$ 時，矩形沒有任何貢獻，但由於 f 嚴格遞減（strictly decreasing），區域在該處的高度為 $\mathrm{f}(x) - \mathrm{f}(t) > 0$。所以那一窄條的面積是正數，因此

$$\int_0^t \big(\mathrm{f}(x) - \mathrm{f}(t)\big)\,\mathrm{d}x > A_0(t).$$

想一想 怎樣把左邊化成與 g' 有關的式子？

把積分拆開，利用 g 的定義，再用剛證明的結果：

$$\begin{aligned}\int_0^t \big(\mathrm{f}(x) - \mathrm{f}(t)\big)\,\mathrm{d}x &= t\,\mathrm{g}(t) - t\,\mathrm{f}(t)\\ &= -t\big(\mathrm{f}(t) - \mathrm{g}(t)\big)\\ &= -t\cdot t\,\mathrm{g}'(t) = -t^2\mathrm{g}'(t).\end{aligned}$$

因此 $-t^2\mathrm{g}'(t) > A_0(t)$。

第 (iii) 部分

這裏 $\mathrm{f}(x)=\dfrac{1}{1+x}$ 在 $x\geq 0$ 時為正且嚴格遞減，所以以上所有結果都適用。

左邊。由第 (ii) 部分最後的計算，

$$-t^2\mathrm{g}'(t)=\int_0^t \frac{\mathrm{d}x}{1+x}-\frac{t}{1+t}=\ln(1+t)-\frac{t}{1+t}.$$

矩形。由 $\mathrm{f}'(x)=-\dfrac{1}{(1+x)^2}$，

$$x\mathrm{f}'(x)+\mathrm{f}(x)=\frac{-x+(1+x)}{(1+x)^2}=\frac{1}{(1+x)^2},$$

所以 x_0 的條件是 $(1+x_0)^2=1+t$。記 $s=\sqrt{1+t}$，則 $s>1$ 且 $x_0=s-1$（取正根 (root)；留意 $0<x_0<t$）。於是 $1+t=s^2$，而

$$A_0(t)=(s-1)\left(\frac{1}{s}-\frac{1}{s^2}\right)=\frac{(s-1)^2}{s^2}=\left(1-\frac{1}{s}\right)^2.$$

想一想 兩邊看起來都很繁複：自然的變量是甚麼？

以 s 表示，一切都簡潔得多。我們有 $\ln(1+t)=2\ln s$ 及 $\dfrac{t}{1+t}=1-\dfrac{1}{s^2}$，所以 $-t^2\mathrm{g}'(t)>A_0(t)$ 變成

$$\begin{aligned}
&2\ln s-1+\frac{1}{s^2}>1-\frac{2}{s}+\frac{1}{s^2}\\
\iff\quad &2\ln s>2-\frac{2}{s}\\
\iff\quad &\ln s>1-\frac{1}{s}.
\end{aligned}$$

由於 $s=\sqrt{1+t}$ 及 $\ln s=\ln\sqrt{1+t}$，上式即

$$\ln\sqrt{1+t}>1-\frac{1}{\sqrt{1+t}}\qquad (t>0),$$

得證。

驗算

- 取 $t=3$：$s=2$，$x_0=1$，$A_0=\frac{1}{4}$，而區域面積為 $\ln 4-\frac{3}{4}\approx 0.636>0.25$。最終的不等式為 $\ln 2\approx 0.693>0.5$。
- 以電腦對多個 t 值直接搜尋矩形面積 $x\big(\mathrm{f}(x)-\mathrm{f}(t)\big)$，確認最大值為 $(1-1/\sqrt{1+t})^2$，在 $x=\sqrt{1+t}-1$ 取得。

- 當 $t \to 0^+$ 時，最終不等式兩邊都趨向 0；展開可得 $\ln s \approx (s-1) - \frac{1}{2}(s-1)^2$ 及 $1 - \frac{1}{s} \approx (s-1) - (s-1)^2$，所以左邊大約多出 $\frac{1}{2}(s-1)^2$，正合預期。

常見錯誤

- 不加說明便假設最佳矩形的角落在曲線上：這需要用到遞減的性質，如第 (i) 部分所示。
- 忘記解釋為何面積不等式是嚴格的：矩形漏掉了區域中 $x_0 < x < t$ 的部分。
- 取了負根 $1 + x_0 = -\sqrt{1+t}$，這會得出 $x_0 < 0$。

STEP 之外

最終的不等式，即對 $s > 1$ 有 $\ln s > 1 - 1/s$，是經典界限 $1 - \frac{1}{s} < \ln s < s - 1$ 的其中一半；這組界限來自把 $\int_1^s \mathrm{d}u/u$ 與矩形作比較，而本題則以一條更巧妙的幾何途徑得到它。把積分與矩形面積作比較，正是黎曼（Riemann）積分的核心；大學一年級的分析課程會由上和與下和（upper and lower sums）出發，仔細建立這套理論。Abbott 的 *Understanding Analysis*（《理解分析》）對此有非常易讀的闡述。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。