詳細解答

STEP II 2013，第 7 題

純數學 • 佩爾方程的解

> **STEP II 2013，第 7 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/13-s2-q7

關鍵思路

形如 $x^2 - 2y^2 = 1$ 的方程稱為佩爾方程（Pell equation）：只要找到一組解，一個固定的線性映射（linear map）便能產生無限多組解。第 (i) 和 (ii) 部分把這些解與同時是平方數的三角形數（triangular number）聯繫起來。第 (iii) 部分的技巧是把 a^2 移到另一邊，再把 $c^4 - a^2$ 按平方差（difference of two squares）因式分解。由於 b 是質數（prime），把 b^3 拆成兩個因數的方法寥寥可數。最後，第 (ii) 部分為最後一部分提供一個非質數的 b。

解答

第 (i) 部分

顯然的解是 $x = 1$、$y = 0$，因為 $1^2 - 2 \cdot 0^2 = 1$。

現設 $p^2 - 2q^2 = 1$。那麼

$$\begin{aligned}(3p + 4q)^2 - 2(2p + 3q)^2 &= (9p^2 + 24pq + 16q^2) - 2(4p^2 + 12pq + 9q^2) \\ &= p^2 - 2q^2 = 1,\end{aligned}$$

因為含 pq 的項互相抵消。所以 $x = 3p + 4q$、$y = 2p + 3q$ 也是一組解，正如所求。

把這個映射作用於 $(p, q) = (1, 0)$ 得 $(3, 2)$，再作用於 $(3, 2)$ 得 $(3 \cdot 3 + 4 \cdot 2,\ 2 \cdot 3 + 3 \cdot 2) = (17, 12)$。驗證：$9 - 8 = 1$ 及 $289 - 288 = 1$。因此，兩組 x 為正奇數、y 為正偶數的解是

$$(x, y) = (3, 2) \quad \text{及} \quad (x, y) = (17, 12).$$

（事實上，這個映射總會保持 x 為奇數，因為 $3p + 4q \equiv p \pmod 2$；而一旦 y 是偶數，

它亦會保持 y 為偶數，因為 $2p+3q \equiv q \pmod 2$。所以這條鏈中往後的每一組解都具有正確的奇偶性（parity）：$(99,70)$、$(577,408)$，如此類推。）

第 (ii) 部分

設 x 為奇數、y 為偶數，並寫 $x=2m+1$ 及 $y=2n$，其中 m、n 為整數。那麼 $(*)$ 變成

$$(2m+1)^2-2(2n)^2=1 \iff 4m^2+4m=8n^2 \iff n^2=\tfrac{1}{2}m(m+1),$$

最後一步是除以 8。這正是所求的形式。（每一步都是可逆的，所以對這樣的 x 和 y，兩條方程是等價的。）

所以 n^2 是三角形數 $1+2+\cdots+m$。由第 (i) 部分，$(3,2)$ 給出 $m=1$、$n=1$（即 $1=1$），而 $(17,12)$ 給出 $m=8$、$n=6$（即 $36=\frac{1}{2}\cdot 8\cdot 9$）。我們會在第 (iii) 部分用到後者。

第 (iii) 部分

移項並按平方差因式分解，

$$b^3=c^4-a^2=(c^2-a)(c^2+a).$$

由於 $b^3>0$ 及 $c^2+a>0$，因數 c^2-a 也是正整數。此外 $a>0$，所以 $c^2-a<c^2+a$。

> **想一想** 把 b^3 寫成兩個正整數之積，共有多少種方法？

因為 b 是質數，b^3 的正因數只有 1、b、b^2 和 b^3。所以把 b^3 分解成較小因數乘以較大因數的方式只有 $1\times b^3$ 和 $b\times b^2$。此外別無其他，而且兩個因數永遠不可能相等，因為 b^3 不是完全平方數（perfect square）。

情況 1：$c^2-a=1$ 及 $c^2+a=b^3$。兩式相加及相減，得

$$c^2=\tfrac{1}{2}(b^3+1), \qquad a=\tfrac{1}{2}(b^3-1).$$

情況 2：$c^2-a=b$ 及 $c^2+a=b^2$。兩式相加及相減，得

$$c^2=\tfrac{1}{2}b(b+1), \qquad a=\tfrac{1}{2}b(b-1).$$

（題目只要求這些公式，但值得知道哪些情況真的會出現。情況 2 永遠不會出現。當 $b=2$ 時，它需要 $c^2=3$。若 b 是奇質數，則 b 與 $\frac{1}{2}(b+1)$ 互質（coprime），因為 $1\le\frac{1}{2}(b+1)<b$；而它們的積是平方數 c^2，所以兩者都必須是平方數。但質數永遠不是平方數。情況 1 則確實會出現：$b=23$ 給出 $\frac{1}{2}(23^3+1)=6084=78^2$，所以 $a=6083$、$b=23$、$c=78$ 是一組解。）

最後部分

情況 2 對質數不成立，但若我們放棄 b 必須是質數的要求，它的公式仍然能給出解。每當 $\frac{1}{2}b(b+1)$ 是完全平方數 c^2 時，令 $a=\frac{1}{2}b(b-1)$。那麼

$$a^2+b^3=(c^2-b)^2+b^3=c^4-2bc^2+b^2+b^3=c^4-b^2(b+1)+b^2+b^3=c^4,$$

這裏用了 $2c^2=b(b+1)$。第 (ii) 部分正好告訴我們 $\frac{1}{2}b(b+1)$ 何時是平方數：$b=m$，其中 $n^2=\frac{1}{2}m(m+1)$。解 $m=1$ 給出 $a=0$，這是不容許的，但 $m=8$、$n=6$ 可行。取 $b=8$、$c=6$、$a=\frac{1}{2}\cdot 8\cdot 7=28$：

$$28^2+8^3=784+512=1296=6^4.$$

所以 $a=28$、$b=8$、$c=6$ 是一組解，其中 $b=2^3$ 不是質數。

驗算

- 鏈中的下一組解 $(99,70)$ 滿足 $9801-2\cdot 4900=1$，它給出 $m=49$、$n=35$，且 $\frac{1}{2}\cdot 49\cdot 50=1225=35^2$。
- $6^4=1296$ 及 $28^2+8^3=784+512=1296$。
- 以電腦搜尋所有 $c<400$，發現 $a=6083$、$b=23$、$c=78$ 是 b 為質數時的唯一解。它屬於情況 1 的解：$78^4-6083^2=(78^2-6083)(78^2+6083)=1\times 12167=23^3$。

常見錯誤

- 忘記 c^2-a 必須是較小的因數，因而多出一些 a 為負數的「情況」。
- 漏掉分解 $1\times b^3$，只找到 $b\times b^2$ 的情況，或者反過來。
- 在最後部分使用由 $(3,2)$ 得出的 $m=1$，這會給出 $a=0$；但題目要求 a 為正數。

STEP 之外

方程 $x^2-2y^2=1$ 就是佩爾方程。它的解恰好就是冪 $(3+2\sqrt{2})^k=x+y\sqrt{2}$，而第 (i) 部分的映射只不過是乘以 $3+2\sqrt{2}$。這是環（ring）如 $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ 中的單位（unit）理論以及連分數（continued fraction）理論的起點。像 $a^2+b^3=c^4$ 這樣的方程屬於廣義費馬方程（generalised Fermat equation）的研究範疇。若想讀一本精彩的入門書，涵蓋以上種種，可閱讀 Davenport 的 *The Higher Arithmetic*（《高等算術》）。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。