詳細解答

STEP II 2013，第 6 題

純數學 • 數列的收斂

> **STEP II 2013，第 6 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/13-s2-q6

本題在 *Beyond STEP* 第 2.2 節作爲極限的黃金比例中有完整的引導式講解：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/ch02/golden-limit.html

關鍵思路

各項 $1, 2, \frac{3}{2}, \frac{5}{3}, \frac{8}{5}, \ldots$ 交替地跳到其最終極限（limit）的上方和下方，所以整個數列（sequence）並非單調（monotonic），不能直接套用該定理。然而，每隔一項取一項，便得到兩個單調數列。第 (i) 部分正是顯示這一點的工具：它說明由於分母為正，步長 $u_{n+2} - u_n$ 與上一步 $u_n - u_{n-2}$ 同號。

解答

首先注意每個 u_n 都是正數：$u_1 = 1 > 0$，而若 $u_n > 0$，則 $u_{n+1} = 1 + 1/u_n > 1 > 0$。因此我們從不會除以零，而且像 $1 + u_n$ 這樣的因子都是正數。

第 (i) 部分

兩次使用 $(*)$，

$$u_{n+2} - u_n = \frac{1}{u_{n+1}} - \frac{1}{u_{n-1}} = \frac{u_{n-1} - u_{n+1}}{u_{n+1}u_{n-1}}, \qquad u_{n+1} - u_{n-1} = \frac{1}{u_n} - \frac{1}{u_{n-2}} = \frac{u_{n-2} - u_n}{u_n u_{n-2}}.$$

（第二式需要 u_{n-2} 存在，這就是 $n \geq 3$ 的原因。）把第二式代入第一式，兩個負號互相抵消：

$$u_{n+2} - u_n = \frac{u_n - u_{n-2}}{(u_n u_{n+1})(u_{n-2}u_{n-1})}.$$

最後，把 $(*)$ 乘以 u_n 得 $u_n u_{n+1} = u_n + 1$，同理 $u_{n-2}u_{n-1} = u_{n-2} + 1$。因此

$$u_{n+2} - u_n = \frac{u_n - u_{n-2}}{(1+u_n)(1+u_{n-2})},$$

得證。

第 (ii) 部分

我們使用歸納法（induction）。由於 $u_1 = 1$，命題 $1 \le u_1 \le 2$ 成立。假設 $1 \le u_n \le 2$。對正數取倒數（reciprocal）會令不等式反向，所以 $\frac{1}{2} \le 1/u_n \le 1$，因此

$$\tfrac{3}{2} \le u_{n+1} = 1 + \frac{1}{u_n} \le 2,$$

這當然給出 $1 \le u_{n+1} \le 2$。由歸納法，對所有 n 均有 $1 \le u_n \le 2$。

第 (iii) 部分

奇數項。我們有 $u_1 = 1$ 及 $u_3 = \frac{3}{2}$，所以 $u_3 - u_1 > 0$。對於奇數 $n \ge 3$，第 (i) 部分說明 $u_{n+2} - u_n$ 等於 $u_n - u_{n-2}$ 乘以正數 $1/\big((1+u_n)(1+u_{n-2})\big)$，所以兩者同號。由歸納法，每一步 $u_{n+2} - u_n$（n 為奇數）都是正數：數列 $u_1, u_3, u_5, \ldots$ 是遞增（increasing）的。由 (ii)，它有上界（bounded above）2，所以由該定理，它趨向某個極限 L；由於其所有項都在 $[1,2]$ 內，故 $1 \le L \le 2$。

偶數項。這裏 $u_2 = 2$ 及 $u_4 = \frac{5}{3}$，所以 $u_4 - u_2 < 0$，同樣的論證顯示 $u_2, u_4, u_6, \ldots$ 是遞減（decreasing）的。它有下界 1。

> **想一想** 該定理是關於有上界的遞增數列的。我們怎樣把它用於遞減數列？

把它應用於各項的相反數：$-u_2, -u_4, -u_6, \ldots$ 是遞增的，且有上界 -1，所以它趨向某個極限，因此 $u_2, u_4, \ldots$ 亦然；記其極限為 M。同樣有 $1 \le M \le 2$。

求極限。使用 $(*)$ 兩步，便得到一條聯繫同奇偶性(parity)各項的遞推關係(recurrence)：

$$u_{n+2} = 1 + \frac{1}{1 + \dfrac{1}{u_n}} = 1 + \frac{u_n}{u_n + 1} = \frac{2u_n + 1}{u_n + 1}.$$

> **想一想** 為甚麼我們可以直接把 u_{n+2} 和 u_n 換成 L？

沿着奇數 n，u_n 和 u_{n+2} 都趨向 L。右方是 u_n 的連續函數（continuous function）（其分母至少為 2），所以它趨向 $(2L+1)/(L+1)$。極限是唯一的，所以

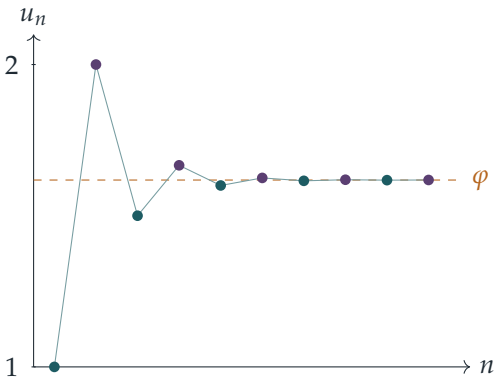
$$L = \frac{2L+1}{L+1} \quad \Longrightarrow \quad L^2 + L = 2L + 1 \quad \Longrightarrow \quad L^2 - L - 1 = 0,$$

於是 $L = \frac{1}{2}(1 \pm \sqrt{5})$。由於 $L \geq 1$，必須有 $L = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{5})$。$M$ 滿足完全相同的方程，且 $M \geq 1$，所以

$$\lim_{k\to\infty} u_{2k-1} = \lim_{k\to\infty} u_{2k} = \tfrac{1}{2}(1 + \sqrt{5}).$$

這兩個極限本來有可能不同（那樣整個數列便會振盪），但該方程只有一個至少為 1 的根。

整個數列。記 $\varphi = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{5})$，並設 $\varepsilon > 0$。存在 K_1 使得對所有奇數 $n > K_1$ 均有 $|u_n - \varphi| < \varepsilon$，亦存在 K_2 使得對所有偶數 $n > K_2$ 同樣成立。那麼對每個 $n > \max(K_1, K_2)$ 均有 $|u_n - \varphi| < \varepsilon$，所以 $u_n \to \varphi$。



奇數項（青綠色）向 φ 攀升，偶數項（梅紫色）則向它下降。

由 $u_1 = 3$ 開始

結論不變。現在 $u_1 = 3$，$u_2 = \frac{4}{3}$，$u_3 = \frac{7}{4}$，$u_4 = \frac{11}{7}$。論證只需稍作調整。

- 第 (i) 部分只用到 $(*)$ 及各項為正，這仍然成立，所以該恆等式 (identity) 依然成立。
- 第 (ii) 部分在 $n = 1$ 時不成立，但 $1 \leq u_2 = \frac{4}{3} \leq 2$，而歸納步驟不變，所以對所有 $n \geq 2$ 均有 $1 \leq u_n \leq 2$。另外 $u_1 = 3 \geq 1$，所以每一項都至少為 1。
- 這次 $u_3 - u_1 = -\frac{5}{4} < 0$ 而 $u_4 - u_2 = \frac{5}{21} > 0$。所以奇數項遞減且有下界 1，偶數項遞增且有上界 2：角色互換了，但兩者仍然收斂 (converge)。
- 遞推關係 $u_{n+2} = (2u_n + 1)/(u_n + 1)$ 仍然成立，而兩個極限都至少為 1，所以兩者同樣都是 φ。

所以該數列仍然趨向 $\frac{1}{2}(1 + \sqrt{5})$。

驗算

當 $u_1 = 1$ 時，各項為 $1, 2, \frac{3}{2}, \frac{5}{3}, \frac{8}{5}, \frac{13}{8}, \ldots$，即相鄰斐波那契數（Fibonacci numbers）之比，而 $u_{10} = \frac{89}{55} \approx 1.61818$，已經非常接近 $\varphi \approx 1.61803$。當 $u_1 = 3$ 時，各項為 $3, \frac{4}{3}, \frac{7}{4}, \frac{11}{7}, \frac{18}{11}, \ldots$（盧卡斯數（Lucas numbers）之比），它們同樣趨近 1.61803。你亦可以用 $n = 3$ 驗算 (i) 中的恆等式：$u_5 - u_3 = \frac{1}{10}$，而 $\dfrac{u_3 - u_1}{(1+u_3)(1+u_1)} = \dfrac{1/2}{5} = \frac{1}{10}$。

常見錯誤

- 假設整個數列收斂，然後直接解 $L = 1 + 1/L$。這樣得出的數值是對的，但只有在證明了收斂之後才成立，而這正是本題的重點。
- 忘記了根 $\frac{1}{2}(1 - \sqrt{5})$：必須把它排除，這裏是利用 $L \geq 1$。
- 把該定理應用於遞減的偶數項子數列（subsequence），卻沒有說明怎樣做（例如透過 $-u_{2k}$）。

STEP 之外

這是大學一年級分析學（analysis）中一個標準論證的範本：單調收斂定理（monotone convergence theorem）、子數列，以及「若奇數項子數列與偶數項子數列收斂到同一極限，則整個數列亦收斂到該極限」這一事實。事實上，u_n 是連分數（continued fraction）$1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cdots}}$ 的第 n 個漸近分數（convergent），而映射 $x \mapsto 1 + 1/x$ 在 φ 附近是一個壓縮映射（contraction），這就是任何正數起點都會趨向 φ 的原因。Abbott 的 *Understanding Analysis*（《理解分析》）仔細討論了單調數列和子數列，而 Davenport 的 *The Higher Arithmetic*（《高等算術》）則涵蓋了連分數。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。