詳細解答

STEP II 2013，第 5 題

純數學 • 對稱性與曲線描繪

> **STEP II 2013，第 5 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/13-s2-q5

關鍵思路

如果一個函數在 $x \mapsto 1-x$ 或 $x \mapsto 1/x$ 這類代換下保持不變，那麼用鏈式法則（chain rule）對該恆等式求導，便能把 x 處的斜率與像點處的斜率聯繫起來。在代換的不動點（fixed point）上，斜率必須等於自身的相反數，因此為零。至於第 (iii) 部分的方程，對稱性提示我們把一切以 $u = x^2 - x$ 表示，而它本身在 $x \mapsto 1-x$ 下不變；這樣一來，處理關於 u 的三次方程，遠比處理關於 x 的六次方程容易。

解答

第 (i) 部分

把 $\mathrm{f}(x) = \mathrm{f}(1-x)$ 對 x 求導，右邊使用鏈式法則，得

$$\mathrm{f}'(x) = -\mathrm{f}'(1-x) \qquad \text{對所有} x.$$

代入 $x = \frac{1}{2}$，得 $\mathrm{f}'(\frac{1}{2}) = -\mathrm{f}'(\frac{1}{2})$，因此 $\mathrm{f}'(\frac{1}{2}) = 0$。

現在再假設當 $x \neq 0$ 時 $\mathrm{f}(x) = \mathrm{f}(1/x)$。由於 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\frac{1}{x}) = -\frac{1}{x^2}$，求導得

$$\mathrm{f}'(x) = -\frac{1}{x^2}\,\mathrm{f}'\left(\frac{1}{x}\right) \qquad (x \neq 0).$$

在 $x = -1$（它是自身的倒數）處，此式變為 $\mathrm{f}'(-1) = -\mathrm{f}'(-1)$，因此 $\mathrm{f}'(-1) = 0$。

在 $x = 2$ 處，由第一個結果，此式給出 $\mathrm{f}'(2) = -\frac{1}{4}\mathrm{f}'(\frac{1}{2}) = 0$。（同樣地，在第一個恆等式中取 $x = 2$，可得 $\mathrm{f}'(2) = -\mathrm{f}'(-1) = 0$。）

第 (ii) 部分

以 $1/x$ 代替 x。分子變為

$$\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x}+1\right)^3=\frac{(1-x+x^2)^3}{x^6},$$

而分母變為

$$\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x}\right)^2=\frac{(1-x)^2}{x^4}.$$

相除，並利用 $x^2(1-x)^2=(x^2-x)^2$，得

$$\mathrm{f}\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{(x^2-x+1)^3}{x^6}\cdot\frac{x^4}{(1-x)^2}=\frac{(x^2-x+1)^3}{x^2(x-1)^2}=\mathrm{f}(x).$$

以 $1-x$ 代替 x：由於 $(1-x)^2-(1-x)=(1-x)(-x)=x^2-x$，所以 x^2-x 不變，從而 x^2-x+1 亦不變。因此 $\mathrm{f}(1-x)=\mathrm{f}(x)$。

草圖。由第 (i) 部分，$x=-1$、$\frac{1}{2}$ 和 2 是駐點（stationary point）；由於駐點恰好有三個，這些就是全部。它們的函數值為

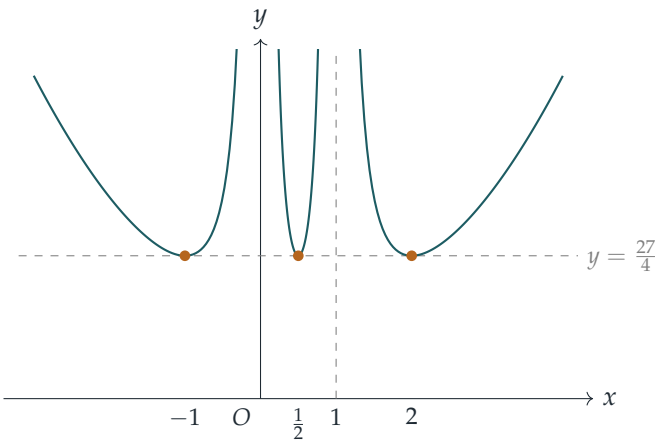
$$\mathrm{f}(-1)=\frac{3^3}{2^2}=\frac{27}{4},\qquad \mathrm{f}(\tfrac{1}{2})=\frac{(3/4)^3}{(1/4)^2}=\frac{27}{4},\qquad \mathrm{f}(2)=\frac{3^3}{2^2}=\frac{27}{4}.$$

三者相同，這是必然的：$\mathrm{f}(2)=\mathrm{f}(\frac{1}{2})$ 且 $\mathrm{f}(2)=\mathrm{f}(1-2)=\mathrm{f}(-1)$。

其他特徵：

- $x^2-x+1=(x-\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}>0$，所以處處有 $\mathrm{f}(x)>0$；曲線永不與 x 軸相交。
- 當 $x\to 0$ 或 $x\to 1$ 時，分子趨向 1，分母趨向 0^+，所以從兩側皆有 $\mathrm{f}(x)\to+\infty$：$x=0$ 和 $x=1$ 是鉛直漸近線（vertical asymptote）。
- 當 $|x|$ 很大時，$\mathrm{f}(x)\approx x^6/x^4=x^2$，所以當 $x\to\pm\infty$ 時 $\mathrm{f}(x)\to+\infty$，大致像一條拋物線。

因此在 $(-\infty,0)$、$(0,1)$、$(1,\infty)$ 這三個區間的每一個上，函數都是連續的，並在兩端都趨向 $+\infty$。所以每個區間都必定包含一個最小值點，而它是駐點；每個區間恰好包含 -1、$\frac{1}{2}$、2 其中之一，所以該點就是最小值點，且沒有其他轉向點（turning point）。每一支都呈 U 形，最低值為 $\frac{27}{4}$。



第 (iii) 部分

方程 $\mathrm{f}(x) = \frac{27}{4}$。從草圖可見，$\frac{27}{4}$ 是每一支上的最小值，而且只在三個駐點處取得。所以根為

$$x = -1, \qquad x = \tfrac{1}{2}, \qquad x = 2,$$

而對定義域內其他所有 x 都有 $\mathrm{f}(x) > \frac{27}{4}$，即對於

$$x < -1, \quad -1 < x < 0, \quad 0 < x < \tfrac{1}{2}, \quad \tfrac{1}{2} < x < 1, \quad 1 < x < 2, \quad x > 2.$$

我們可以用代數方法確認這一點。設 $u = x^2 - x$（故在定義域內 $u \neq 0$）；則 $\mathrm{f}(x) = \dfrac{(u+1)^3}{u^2}$，且

$$\mathrm{f}(x) - \frac{27}{4} = \frac{4u^3 - 15u^2 + 12u + 4}{4u^2} = \frac{(u-2)^2(4u+1)}{4u^2}.$$

由於 $4u + 1 = 4x^2 - 4x + 1 = (2x-1)^2 \geq 0$，此式永不為負，而它為零當且僅當 $u = 2$（即 $x^2 - x - 2 = 0$，所以 $x = 2$ 或 -1）或 $x = \frac{1}{2}$。

? **想一想** 怎樣才能不解六次方程，就猜出 $\mathrm{f}(x) = \frac{343}{36}$ 的一個根？

方程 $\mathrm{f}(x) = \frac{343}{36}$。注意 $\frac{343}{36} = \frac{7^3}{6^2}$，所以我們尋找滿足 $x^2 - x + 1 = 7$ 和 $x^2 - x = 6$ 的 x。$x = 3$ 兩者皆滿足，所以 $\mathrm{f}(3) = \frac{343}{36}$。對稱性現在免費送上更多的根：對 3 反覆施行 $x \mapsto 1 - x$ 和 $x \mapsto 1/x$，得到

$$3, \quad 1 - 3 = -2, \quad \tfrac{1}{3}, \quad 1 - \tfrac{1}{3} = \tfrac{2}{3}, \quad \tfrac{3}{2}, \quad 1 - \tfrac{3}{2} = -\tfrac{1}{2}.$$

這是六個不同的數，而去分母後，$\mathrm{f}(x) = \frac{343}{36}$ 會變成一個六次多項式方程，所以這些就是全部的根：

$$x = -2, -\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{3}, \tfrac{2}{3}, \tfrac{3}{2}, 3.$$

（以 u 表示，方程為 $36u^3 - 235u^2 + 108u + 36 = 0$，可因式分解為 $(u-6)(9u+2)(4u-3) = 0$，得出數對 $\{3,-2\}$、$\{\frac{1}{3},\frac{2}{3}\}$ 和 $\{\frac{3}{2},-\frac{1}{2}\}$。）

由於 $\frac{343}{36} > \frac{27}{4}$，水平線 $y = \frac{343}{36}$ 與每一支 U 形曲線各相交兩次，在最小值兩側各一次，而在這兩個交點以外，曲線位於直線上方。$(-\infty, 0)$ 上的一支交於 -2 和 $-\frac{1}{2}$，$(0,1)$ 上的一支交於 $\frac{1}{3}$ 和 $\frac{2}{3}$，$(1,\infty)$ 上的一支交於 $\frac{3}{2}$ 和 3。因此 $\mathrm{f}(x) > \frac{343}{36}$ 當且僅當

$$x < -2, \quad -\tfrac{1}{2} < x < 0, \quad 0 < x < \tfrac{1}{3}, \quad \tfrac{2}{3} < x < 1, \quad 1 < x < \tfrac{3}{2}, \quad x > 3.$$

驗算

- 試代一個值：$\mathrm{f}(-\frac{1}{2}) = \dfrac{(7/4)^3}{(3/4)^2} = \dfrac{343/64}{9/16} = \dfrac{343}{36}$，與所述相符。
- 取所述區間內的一點：$\mathrm{f}(4) = \frac{13^3}{12^2} \approx 15.3 > \frac{343}{36} \approx 9.53$，而 $\mathrm{f}(2) = 6.75$ 位於下方，與 $(\frac{3}{2}, 3)$ 被排除一致。
- 六個根既可配成和為 1 的數對，又可配成互為倒數的數對，正如兩個對稱性所要求；以電腦在 10^5 個隨機點上檢驗，確認了這些不等式。

常見錯誤

- 對 $\mathrm{f}(1/x)$ 求導時，忘記鏈式法則帶來的因子 $-1/x^2$。這在 $x = -1$ 處無關重要，但要明白為何 2 處的斜率為零，這個因子不可或缺。
- 把範圍寫成 $x < -2$ 或 $x > 3$ 之類的單一區間，忘記了 $x = 0$ 和 $x = 1$ 處的漸近線把解集分割開來；必須排除 $x = 0$ 和 $x = 1$。
- 把駐點當作極大值點。每一支在兩端都趨向 $+\infty$，所以它們是極小值點。

STEP 之外

由 $x \mapsto 1 - x$ 和 $x \mapsto 1/x$ 生成的六個映射構成一個羣（group）（同構（isomorphic）於三角形的對稱羣），而 f 在相差一個常數因子的意義下，就是交比（cross-ratio）的經典 j 不變量（j-invariant）：即在全部六個代換下都保持不變的函數。在一組代換下不變的函數，是伽羅瓦理論（Galois theory）和橢圓曲線（elliptic curve）理論的核心主題。Allenby 的 *Rings, Fields and Groups*（《環、域與羣》）是認識這類變換羣的好起點。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。