詳細解答

# STEP II 2013，第 4 題

純數學 • 弦中點的軌跡

> **STEP II 2013，第 4 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/13-s2-q4

## 關鍵思路

求弦（chord）的中點（midpoint）時，根本不必求出弦的兩個端點：$P$ 和 $Q$ 的 $x$ 坐標是某個二次方程（quadratic equation）的根，而它們的平均值就是首兩項係數之比的一半再取負號。之後，每個軌跡（locus）都只是消去一個參數（parameter）的問題。每個答案都可以用幾何解釋：由圓心到弦中點的直線與該弦垂直（perpendicular）。

## 解答

### $M$ 的坐標

直線為 $y = b(x - a)$。代入 $x^2 + y^2 = 1$，得

$$(1 + b^2)x^2 - 2ab^2x + a^2b^2 - 1 = 0.$$

它的根是 $P$ 和 $Q$ 的 $x$ 坐標 $x_P$、$x_Q$，所以由根之和（sum of the roots）得

$$x_M = \tfrac{1}{2}(x_P + x_Q) = \frac{ab^2}{1 + b^2}.$$

由於 $M$ 在該直線上，$y_M = b(x_M - a) = b \cdot \dfrac{ab^2 - a - ab^2}{1 + b^2}$，所以

$$M = \left(\frac{ab^2}{1 + b^2},\ -\frac{ab}{1 + b^2}\right).$$

要 $P$ 和 $Q$ 存在且互不相同，判別式（discriminant）必須為正：

$$4a^2b^4 - 4(1 + b^2)(a^2b^2 - 1) = 4(1 + b^2 - a^2b^2) > 0 \iff a^2b^2 < 1 + b^2.$$

（這表示由 $O$ 到該直線的距離 $|ab|/\sqrt{1 + b^2}$ 小於 1。）每一部分都需要用到這個條件。

**第 (i) 部分**

固定 $b > 0$，則

$$-by_M = -b \cdot \left(-\frac{ab}{1+b^2}\right) = \frac{ab^2}{1+b^2} = x_M,$$

所以軌跡上每一點都滿足 $x = -by$，正如所求。這是通過 $O$、斜率（gradient）為 $-1/b$ 的直線，與弦垂直，與關鍵思路的預期完全一致。

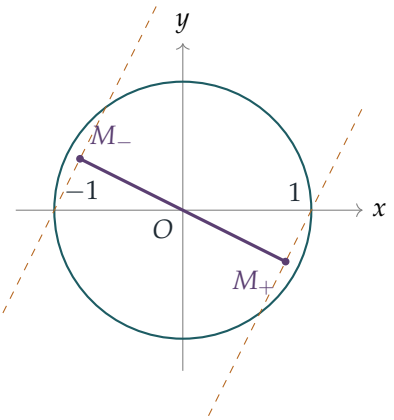
若 $-1 \le a \le 1$，則 $a^2b^2 \le b^2 < 1 + b^2$，所以直線必與圓相交於兩點，對每個這樣的 $a$，$M$ 都有定義。$M$ 的兩個坐標都是 $a$ 乘以一個常數，所以當 $a$ 取遍 $[-1,1]$ 時，點 $M$ 沿直線 $x = -by$ 由 $a = -1$ 對應的點穩定地移動到 $a = 1$ 對應的點。因此軌跡是連接

$$M_\pm = \pm\left(\frac{b^2}{1+b^2}, -\frac{b}{1+b^2}\right),$$

的線段，其長度為

$$2\,\frac{\sqrt{b^4+b^2}}{1+b^2} = \frac{2b\sqrt{1+b^2}}{1+b^2} = \frac{2b}{(1+b^2)^{1/2}},$$

這裏利用了 $b > 0$ 來開 $b^2$ 的平方根。這就是所求的長度。線段以 $O$ 為中點；其端點 $M_+$ 是通過 $(1,0)$ 的弦的中點，而 $M_-$ 則是通過 $(-1,0)$ 的弦的中點。下圖顯示 $b = 2$ 的情況，此時端點為 $\pm(\frac{4}{5}, -\frac{2}{5})$。




虛線是兩條極端的弦，分別通過 $(\pm 1, 0)$，斜率為 2。

**第 (ii)(a) 部分**

現在固定 $a$，且 $0 < a < 1$。於是 $a^2b^2 < b^2 < 1 + b^2$，所以每條通過 $A = (a,0)$ 的直線都與圓相交兩次。由 $M$ 的公式，

$$x^2 + y^2 = \frac{a^2b^4 + a^2b^2}{(1+b^2)^2} = \frac{a^2b^2}{1+b^2} = a \cdot \frac{ab^2}{1+b^2} = ax.$$

所以 $M$ 在

$$x^2+y^2-ax=0, \quad \text{即} \quad (x-\tfrac{a}{2})^2+y^2=(\tfrac{a}{2})^2,$$

上，這是圓心為 $(\frac{a}{2},0)$、半徑為 $\frac{a}{2}$ 的圓，以 $OA$ 為直徑（diameter）。

**想一想** 這個圓是否整個都被描出？

並不完全。由於 $x=ab^2/(1+b^2)=a-a/(1+b^2)$，總有 $0\le x<a$，所以點 $A=(a,0)$ 本身永遠不會到達；要到達它，需要通過 $A$ 的鉛垂線，而鉛垂線沒有斜率。其他每一點都能到達：設 $b=\tan\theta$，其中 $-\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{\pi}{2}$，

$$M=(a\sin^2\theta,\ -a\sin\theta\cos\theta)=(\tfrac{a}{2}-\tfrac{a}{2}\cos 2\theta,\ -\tfrac{a}{2}\sin 2\theta),$$

當 $2\theta$ 取遍 $(-\pi,\pi)$ 時，這恰好走遍整個圓一次，只差 $2\theta=\pm\pi$ 對應的點，即 $A$。所以軌跡是以 $OA$ 為直徑的圓，但除去單獨一點 $A$。從幾何角度看：$OM$ 與弦 $AM$ 垂直，所以 $\angle OMA$ 是直角，$M$ 在以 $OA$ 為直徑的圓上（當 $b=0$ 時 $M=O$）。這個圓位於單位圓之內。

### 第 (ii)(b) 部分

現在 $a=1/b$，其中 $0<b\le 1$。條件 $a^2b^2<1+b^2$ 變成 $1<1+b^2$，此式成立。直線為 $y=b(x-1/b)=bx-1$，所以它必定通過單位圓上的點 $B=(0,-1)$；因此 $B$ 必定是 $P$、$Q$ 其中之一。公式給出

$$M=\left(\frac{b}{1+b^2},\ -\frac{1}{1+b^2}\right), \qquad x^2+y^2=\frac{b^2+1}{(1+b^2)^2}=\frac{1}{1+b^2}=-y.$$

所以 $M$ 在

$$x^2+y^2+y=0, \quad \text{即} \quad x^2+(y+\tfrac{1}{2})^2=(\tfrac{1}{2})^2,$$

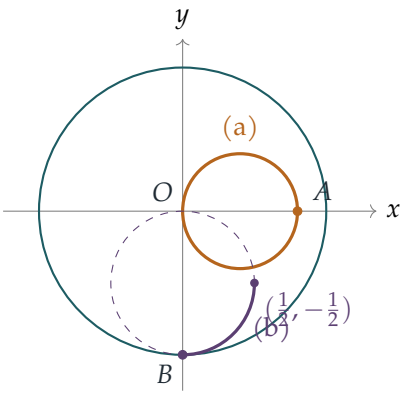
上，這是圓心為 $(0,-\frac{1}{2})$、半徑為 $\frac{1}{2}$ 的圓，以 $OB$ 為直徑（理由與 (a) 中的直角相同）。

這次只描出圓的一部分。設 $b=\tan\theta$，$0<\theta\le\frac{\pi}{4}$，

$$M=(\tfrac{1}{2}\sin 2\theta,\ -\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{2}\cos 2\theta),$$

而 $2\theta$ 取遍 $(0,\frac{\pi}{2}]$。所以軌跡是四分之一個圓：由 $B=(0,-1)$（不包括在內，因為它需要 $b=0$）沿逆時針方向到 $(\frac{1}{2},-\frac{1}{2})$（包括在內，由 $b=1$、$a=1$ 得到）的圓弧。在這段弧上，$0<x\le\frac{1}{2}$ 且 $-1<y\le-\frac{1}{2}$。

下圖連同單位圓顯示兩個軌跡，(a) 中取 $a=0.8$。空心圓點標示 (a) 中缺少的點 $A$ 和 (b) 中缺少的端點 $B$。




在 (b) 中，實線弧是軌跡；小圓其餘的虛線部分不會到達。

## 驗算

- 當 $a = 0$ 時，直線通過 $O$，所以弦是直徑，$M$ 應該是 $O$：公式給出 $(0,0)$。
- 在 (i) 中取 $b = 1$：通過 $(1,0)$、斜率為 1 的弦連接 $(1,0)$ 和 $(0,-1)$，中點為 $(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$，與 $M_+$ 吻合。此時線段長度為 $\sqrt{2} = 2/\sqrt{2}$，與公式一致。
- 同一條弦正是 (ii)(b) 中圓弧在 $b = 1$ 的端點，而 $(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$ 滿足 $x^2 + y^2 + y = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{2} = 0$。
- 在 (ii)(a) 中，$b = 1$ 給出 $M = (\frac{a}{2}, -\frac{a}{2})$，即以 $OA$ 為直徑的圓的最低點，對於傾角 45° 的弦，理應如此。

## 常見錯誤

- 用二次方程公式明確求出 $P$ 和 $Q$。這樣做可行，但用根之和一行就能得出 $M$。
- 在 (ii)(a) 或 (ii)(b) 中聲稱軌跡是整個圓。必須檢查參數實際取哪些值，以及這些值對應哪些點。
- 忘記檢查直線是否真的與圓相交；在 (i) 和 (ii) 的兩種情況中，它都必定相交，但這一點需要說明。

## STEP 之外

平行弦的中點位於一條通過中心的直線上，這個事實對任何圓錐曲線（conic）都成立：對橢圓而言，這條直線稱為*共軛直徑*（conjugate diameter），這也讓我們初步窺見射影幾

何中極點與極線（poles and polars）的概念。第 (ii) 部分中的圓，其實就是經典定理「半圓上的圓周角是直角」反過來運用。若想進一步了解軌跡和以參數化（parametrisation）作為解題工具，Siklos 的 *Advanced Problems in Mathematics*（《高等數學難題》）是很好的下一步。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。