詳細解答

STEP II 2013，第 3 題

純數學 • 三次方程的根

> **STEP II 2013，第 3 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/13-s2-q3

關鍵思路

一切都源於首項係數為正、且有三個相異實根的三次函數（cubic）的形狀：曲線從 $-\infty$ 上升，向上穿過橫軸，回落，然後再次向上穿過橫軸。數值 $f(0) = c$ 告訴我們 0 相對於各根的位置，而轉向點（turning points）（即二次方程 $f'(x) = 0$ 的根）則可以透過它們的和與積來確定。最後一部分提醒我們：單靠轉向點的條件，並不能保證曲線真的與橫軸相交三次。

解答

全文中設

$$f(x) = x^3 + 3ax^2 + 3bx + c, \qquad f'(x) = 3(x^2 + 2ax + b).$$

當 $f(x) = 0$ 有三個相異實根 $\alpha < \beta < \gamma$ 時，我們可以寫成 $f(x) = (x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)$，於是從三個因式的正負號可讀出

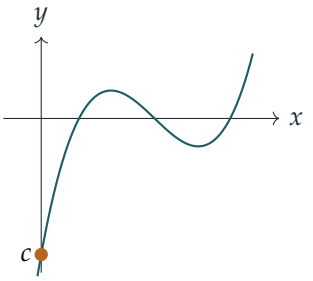
$$f(x) < 0 \text{ 於 } (-\infty, \alpha) \cup (\beta, \gamma), \qquad f(x) > 0 \text{ 於 } (\alpha, \beta) \cup (\gamma, \infty).$$

此外，由羅爾定理（Rolle's theorem），f' 在 (α, β) 內有一個零點，在 (β, γ) 內有另一個零點。由於 f' 是二次函數，它再沒有其他零點，因此轉向點位於 $p < q$，且

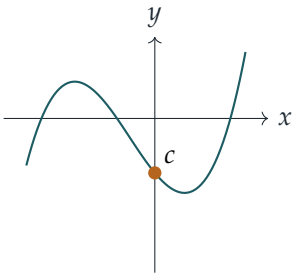
$$\alpha < p < \beta < q < \gamma.$$

第 (i) 部分

曲線 $y = f(x)$ 與 y 軸相交於 $(0, c)$；由於 $c < 0$，這點位於 x 軸下方。根據上面的正負號規律，$f(0) < 0$ 表示 $0 < \alpha$ 或 $\beta < 0 < \gamma$。這就是下面的兩幅圖。



三個根皆為正



恰有一個根為正

若 $0 < \alpha$，則三個根皆為正。若 $\beta < 0 < \gamma$，則 $\alpha < \beta < 0$，因此恰有一個根（γ）為正。由於 $f(0) = c \neq 0$，沒有根等於零。所以要麼恰有一個根為正，要麼三個根皆為正，得證。

第 (ii) 部分

現在 $0 < \alpha < \beta < \gamma$。

c 的正負號。由於 $0 < \alpha$，點 0 位於 $(-\infty, \alpha)$ 內，而在該區間上 $f < 0$。所以 $c = f(0) < 0$。

轉向點。方程 $x^2 + 2ax + b = 0$ 有兩個相異實根 p 和 q，因此其判別式（discriminant）為正：

$$4a^2 - 4b > 0 \quad \Longrightarrow \quad a^2 > b.$$

由於 $p > \alpha > 0$ 且 $q > p$，兩個轉向點皆為正。對於二次式 $x^2 + 2ax + b$，兩根之和與積分別為

$$p + q = -2a, \qquad pq = b.$$

由於 $p, q > 0$，得 $-2a > 0$，所以 $a < 0$，且 $b = pq > 0$。綜合以上，

$$a^2 > b > 0, \qquad a < 0, \qquad c < 0,$$

這就是 $(*)$。

（你也可以直接從根得出 $a < 0$、$b > 0$ 和 $c < 0$：$\alpha + \beta + \gamma = -3a$、$\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = 3b$ 和 $\alpha\beta\gamma = -c$ 皆為正。但 $a^2 > b$ 確實需要用到轉向點。）

第 (iii) 部分

現在 $c = f(0) > 0$，所以 0 位於 (α, β) 或 (γ, ∞) 內，即 $f > 0$ 的兩個區間。這給出兩幅可能的圖：要麼 $\alpha < 0 < \beta < \gamma$（一個負根、兩個正根），要麼 $\alpha < \beta < \gamma < 0$（三個根皆為負）。

想一想 條件 $ab < 0$ 怎樣排除其中一種情況？

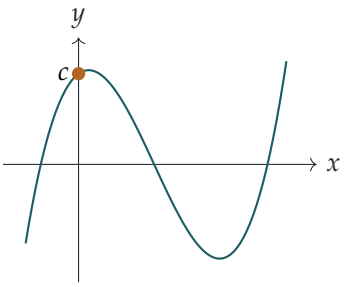
再看看轉向點。若三個根皆為負，則 $p < q < \gamma < 0$，所以兩個轉向點皆為負。於是

$$-2a = p + q < 0 \quad \text{及} \quad b = pq > 0,$$

所以 $a > 0$ 且 $b > 0$，得 $ab > 0$。這與 $ab < 0$ 矛盾。因此第二幅圖不可能出現，故

$$\alpha < 0 < \beta < \gamma :$$

一個根爲負，另外兩個根爲正。



這種情況確實可以出現。例如，根 -1、2 和 5 給出 $x^3 - 6x^2 + 3x + 10$，所以 $a = -2$、$b = 1$、$c = 10$，其中 $ab = -2 < 0$ 且 $c > 0$；這就是上面所繪的曲線。

第 (iv) 部分

想一想 除了 $(*)$ 之外，三次函數還需要甚麼額外條件才有三個實根？

條件 $(*)$ 只控制轉向點和 $f(0)$ 的正負號。要有三個實根，局部極大值（local maximum）還必須位於橫軸上方。所以我們應選取 a 和 b 使兩個轉向點皆為正，然後令 c 足夠負，把局部極大值拉到橫軸下方。

取 $a = -1$ 及 $b = \frac{3}{4}$，使得

$$f'(x) = 3(x^2 - 2x + \tfrac{3}{4}) = 3(x - \tfrac{1}{2})(x - \tfrac{3}{2}).$$

局部極大值位於 $x = \frac{1}{2}$，該處

$$f(\tfrac{1}{2}) = \tfrac{1}{8} - \tfrac{3}{4} + \tfrac{9}{8} + c = \tfrac{1}{2} + c.$$

選取 $c = -1$。方程於是為

$$x^3 - 3x^2 + \tfrac{9}{4}x - 1 = 0 \qquad (a = -1,\ b = \tfrac{3}{4},\ c = -1),$$

且 $a^2 = 1 > \frac{3}{4} = b > 0$、$a < 0$、$c < 0$，所以 $(*)$ 成立。

現在數一數根的個數。f 在 $(-\infty, \frac{1}{2}]$ 上遞增，所以在該處 $f(x) \le f(\frac{1}{2}) = -\frac{1}{2} < 0$。在 $[\frac{1}{2}, \frac{3}{2}]$ 上，f 遞減，所以一直低於 $-\frac{1}{2}$。在 $[\frac{3}{2}, \infty)$ 上，f 從 $f(\frac{3}{2}) = -1$ 遞增至 $+\infty$，所以恰好穿過橫軸一次。因此恰有一個實根（由於 $f(2) = -\frac{1}{2}$ 及 $f(3) = \frac{23}{4}$，它位於 2 與 3 之間）。

驗算

- 三次式 $(x-1)(x-2)(x-3) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$ 的 $a = -2$、$b = \frac{11}{3}$、$c = -6$，而的確 $a^2 = 4 > \frac{11}{3} > 0$，正如第 (ii) 部分所預測。
- 把曲線反射，即 $x \mapsto -x$，會把根 α, β, γ 變為 $-\alpha, -\beta, -\gamma$，並改變 a 和 c 的正負號，但不改變 b。所以 ab 和 c 都改變正負號，而第 (i) 部分的鏡像版本說明：當 $c > 0$ 時，要麼恰有一個根為負，要麼三個根皆為負——這正是我們在第 (iii) 部分開始時的兩幅圖。
- 在第 (iv) 部分中，唯一的實根是 $x \approx 2.178$。以電腦檢查數以千計隨機生成、具三個相異實根的三次式，結果亦與第 (i)–(iii) 部分吻合。

常見錯誤

- 試圖單從根的正負號證明 $a^2 > b$。這個不等式其實來自轉向點是相異實數這一事實。
- 以為 $(*)$ 等價於有三個正根。第 (iv) 部分說明它只是必要條件（necessary），而非充分條件（sufficient）。
- 在第 (iv) 部分中，選取的 c 使局部極小值為負，但局部極大值仍為正。這樣會得到三個根，而不是一個。

STEP 之外

這裏的正負號論證是一套一般理論的起點：笛卡兒符號法則（Descartes' rule of signs）以係數中正負號改變的次數作為正根個數的上界，而斯圖姆定理（Sturm's theorem）則能準確計算某區間內實根的個數。對於三次函數，第 (iv) 部分所缺少的條件是判別式的正負號；判別式（相差一個正因子）就是兩個轉向點處函數值的乘積 $-f(p)f(q)$。Allenby 的 *Rings, Fields and Groups*（《環、域與羣》）以大學一年級程度討論多項式及其根。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。