詳細解答

STEP II 2013，第 2 題

純數學 • 歸約公式

> **STEP II 2013，第 2 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/13-s2-q2

關鍵思路

被積函數（integrand）$x^n(1-x)^n$ 在反射 $x \mapsto 1-x$ 下對稱（symmetric），而這種對稱性讓我們可以毫無代價地互換 x 與 $1-x$ 的角色。接着用分部積分（integration by parts）把 x 的一個冪換成 $1-x$ 的一個冪，再利用恆等式 $x+(1-x)=1$ 把乘積拆回我們已知的積分。兩者結合便得到一條遞推公式（reduction formula）；對整數 n，它可以逐步展開成階乘（factorial），而對半整數（half-integer）也同樣適用。

解答

第 (i) 部分

對 $n \geq 1$，記 $J_n = \int_0^1 x^{n-1}(1-x)^n \,\mathrm{d}x$。代換（substitute）$u = 1-x$，於是 $\mathrm{d}x = -\mathrm{d}u$，而積分限 $0, 1$ 變成 $1, 0$：

$$J_n = \int_1^0 (1-u)^{n-1}u^n\,(-\mathrm{d}u) = \int_0^1 u^n(1-u)^{n-1}\,\mathrm{d}u,$$

這就是所要求的等式（啞變量（dummy variable）用甚麼名字並不重要）。

把 J_n 的兩個相等形式相加，

$$\begin{aligned} 2J_n &= \int_0^1 \left[x^{n-1}(1-x)^n + x^n(1-x)^{n-1}\right]\mathrm{d}x \\ &= \int_0^1 x^{n-1}(1-x)^{n-1}[(1-x)+x]\mathrm{d}x = I_{n-1}. \end{aligned}$$

接着對 I_n 作分部積分，取 $u = x^n$ 及 $\mathrm{d}v = (1-x)^n\,\mathrm{d}x$，故 $v = -\dfrac{(1-x)^{n+1}}{n+1}$：

$$I_n = \left[-\frac{x^n(1-x)^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 + \frac{n}{n+1}\int_0^1 x^{n-1}(1-x)^{n+1}\,\mathrm{d}x.$$

邊界項（boundary term）在兩端都等於零：在 $x = 1$ 處是因為有因子 $(1-x)^{n+1}$，在 $x = 0$ 處則是因為有因子 x^n 且 $n \geq 1$。由此得到題目所給的公式

$$I_n = \frac{n}{n+1}\int_0^1 x^{n-1}(1-x)^{n+1}\,\mathrm{d}x.$$

想一想 怎樣才能從這個積分回到 I_n 和 I_{n-1}？

分出一個因子 $1-x$，並照字面寫成 $1-x$：

$$x^{n-1}(1-x)^{n+1} = x^{n-1}(1-x)^n\,(1-x) = x^{n-1}(1-x)^n - x^n(1-x)^n.$$

積分後，利用上面的結果，右邊等於 $J_n - I_n = \frac{1}{2}I_{n-1} - I_n$。所以

$$I_n = \frac{n}{n+1}\left(\tfrac{1}{2}I_{n-1} - I_n\right) \quad\Longrightarrow\quad I_n \cdot \frac{2n+1}{n+1} = \frac{n}{2(n+1)}I_{n-1},$$

再乘以 $\dfrac{n+1}{2n+1}$，

$$I_n = \frac{n}{2(2n+1)}\,I_{n-1},$$

正是所求。留意這個論證完全沒有用到 n 是整數：只需要 $n \geq 1$（為了處理邊界項，以及確保每個被積函數在 $[0,1]$ 上連續）。我們會在第 (iii) 部分用到這一點。

第 (ii) 部分

我們用歸納法（induction）證明 $I_n = \dfrac{(n!)^2}{(2n+1)!}$，從 $n = 0$ 開始：$I_0 = \int_0^1 1\,\mathrm{d}x = 1 = \dfrac{(0!)^2}{1!}$。假設公式對 $n-1$ 成立，其中 $n \geq 1$。那麼由第 (i) 部分，

$$\begin{aligned} I_n = \frac{n}{2(2n+1)} \cdot \frac{((n-1)!)^2}{(2n-1)!} &= \frac{n^2((n-1)!)^2}{2n(2n+1)(2n-1)!} \\ &= \frac{(n!)^2}{(2n+1)!}, \end{aligned}$$

這裏我們把分子和分母同乘以 n，並用了 $2n(2n+1)(2n-1)! = (2n+1)!$。歸納至此完成，所以公式對每個正整數 n（以及 $n = 0$）都成立。

第 (iii) 部分

取 $x = \sin^2\theta$，則 $\mathrm{d}x = 2\sin\theta\cos\theta\,\mathrm{d}\theta$，而 θ 由 0 變到 $\frac{\pi}{2}$。在這個區間上 $\sin\theta$ 和 $\cos\theta$ 都非負，所以

$$(x(1-x))^{1/2} = (\sin^2\theta\cos^2\theta)^{1/2} = \sin\theta\cos\theta.$$

想一想 為甚麼這裏需要 $\sin\theta\cos\theta \geq 0$？

因為 $\sqrt{t^2} = |t|$，而不是 t；在 $[0, \frac{\pi}{2}]$ 上，絕對值（modulus）符號可以直接去掉。因此

$$\begin{aligned} I_{\frac{1}{2}} &= \int_0^{\pi/2} \sin\theta\cos\theta \cdot 2\sin\theta\cos\theta\,\mathrm{d}\theta = \int_0^{\pi/2} \tfrac{1}{2}\sin^2 2\theta\,\mathrm{d}\theta \\ &= \int_0^{\pi/2} \tfrac{1}{4}(1-\cos 4\theta)\mathrm{d}\theta = \tfrac{1}{4}\Big[\theta - \tfrac{1}{4}\sin 4\theta\Big]_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{8}. \end{aligned}$$

至於 $I_{\frac{3}{2}}$，用第 (i) 部分的遞推公式並取 $n = \frac{3}{2}$；這是容許的，因為 $\frac{3}{2} \geq 1$，而推導過程從來不需要 n 是整數：

$$I_{\frac{3}{2}} = \frac{3/2}{2\cdot 4} I_{\frac{1}{2}} = \frac{3}{16}\cdot\frac{\pi}{8} = \frac{3\pi}{128}.$$

作為交叉驗證，同一代換可直接得到

$$I_{\frac{3}{2}} = \int_0^{\pi/2} 2\sin^4\theta\cos^4\theta\,\mathrm{d}\theta = \frac{1}{8}\int_0^{\pi/2} \sin^4 2\theta\,\mathrm{d}\theta = \frac{1}{8}\cdot\frac{3\pi}{16} = \frac{3\pi}{128},$$

其中用了 $\sin^4\phi = \frac{3}{8} - \frac{1}{2}\cos 2\phi + \frac{1}{8}\cos 4\phi$。

驗算

- $I_1 = \int_0^1 (x - x^2)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{6}$，而公式給出 $\frac{1}{3!} = \frac{1}{6}$。同樣，$I_2 = \int_0^1 (x^2 - 2x^3 + x^4)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} = \frac{1}{30} = \frac{4}{5!}$。
- $I_{\frac{1}{2}}$ 是半徑為 $\frac{1}{2}$ 的半圓（semicircle）$y = \sqrt{\frac{1}{4} - (x-\frac{1}{2})^2}$ 下方的面積，即 $\frac{1}{2}\pi\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{\pi}{8}$。
- 數值上，$I_{\frac{3}{2}} \approx 0.073631$，與 $3\pi/128$ 吻合；遞推公式亦已用電腦對非整數 n（例如 $n = 2.7$）驗證過。

常見錯誤

- 忘記檢查分部積分中的邊界項是否等於零，尤其是在 $x = 0$ 處。
- 寫 $\sqrt{\sin^2\theta\cos^2\theta} = \sin\theta\cos\theta$ 時沒有指出在 $[0, \frac{\pi}{2}]$ 上的正負號。
- 用第 (ii) 部分的階乘公式計算 $I_{\frac{3}{2}}$，但該公式只對整數證明過；用遞推公式才是穩妥的做法。

STEP 之外

I_n 是貝塔函數（beta function）$B(p,q) = \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,\mathrm{d}x$ 的特例，這裏 $I_n = B(n+1, n+1)$，而第 (ii) 部分正是 $B(p,q) = \Gamma(p)\Gamma(q)/\Gamma(p+q)$ 的整數情況。把 $n = \frac{1}{2}$ 代入這個恆等式，便可得出 $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$，這就是第 (iii) 部分出現 π 的更深層原因。這類積分是統計學中貝塔分佈（beta distribution）以及沃利斯（Wallis）的 π 乘積公式背後的基礎；Siklos 的 *Advanced Problems in Mathematics*（《高等數學難題》）收錄了更多同類風格的遞推公式題目。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。