詳細解答

STEP II 2013，第 12 題

概率與統計 • 泊松分佈的矩

> **STEP II 2013，第 12 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/13-s2-q12

關鍵思路

X 保留 U 的奇數值，Y 則保留偶數值，因此每個期望值（expectation）都是只取奇數項或只取偶數項的泊松（Poisson）和。求 $\mathrm{E}(U)$ 和 $\mathrm{E}(U(U-1))$ 的技巧依然適用：把 k 或 $k(k-1)$ 與 $k!$ 約去，再提出 λ 或 λ^2。k 每減少一，奇偶便互換一次，這正是 α 與 β 互換位置的原因。另外留意 $\alpha+\beta=\mathrm{e}^{\lambda}$，所以因子 $\mathrm{e}^{-\lambda}$ 就是 $1/(\alpha+\beta)$。

解答

全文中，對 $k=0,1,2,\ldots$，$\mathrm{P}(U=k)=\mathrm{e}^{-\lambda}\lambda^k/k!$，其中 $\lambda>0$。把兩個級數（series）逐項相加，得

$$\alpha+\beta=\sum_{k\geq 0}\frac{\lambda^k}{k!}=\mathrm{e}^{\lambda},\qquad \text{所以}\qquad \mathrm{e}^{-\lambda}=\frac{1}{\alpha+\beta}.$$

（事實上 $\alpha=\cosh\lambda$，而 $\beta=\sinh\lambda$。）

第 (i) 部分

除非 U 是奇數，否則 X 為 0，所以只有奇數 k 有貢獻：

$$\mathrm{E}(X)=\sum_{k\text{ 為奇數}}k\frac{\mathrm{e}^{-\lambda}\lambda^k}{k!}=\mathrm{e}^{-\lambda}\lambda\sum_{k\text{ 為奇數}}\frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!}=\mathrm{e}^{-\lambda}\lambda\left(1+\frac{\lambda^2}{2!}+\frac{\lambda^4}{4!}+\cdots\right),$$

因為 $k-1$ 取遍 $0,2,4,\ldots$。所以

$$\mathrm{E}(X)=\frac{\lambda\alpha}{\alpha+\beta}.$$

同理，Y 取的是偶數 $k \geq 2$（$k = 0$ 那一項本來就是零），此時 $k-1$ 取遍 $1, 3, 5, \ldots$：

$$\mathrm{E}(Y) = \mathrm{e}^{-\lambda}\lambda \sum_{k \text{ 為偶數}, k\geq 2} \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} = \frac{\lambda\beta}{\alpha+\beta}.$$

驗證一下：$\mathrm{E}(X) + \mathrm{E}(Y) = \lambda = \mathrm{E}(U)$，理應如此，因為 $X + Y = U$。

第 (ii) 部分

> **想一想** 當 k^2 不能與 $k!$ 乾淨地約去時，怎樣求 $k^2\lambda^k/k!$ 的和？

把 $k^2 = k(k-1) + k$ 寫出來。$k(k-1)$ 部分約去 $k!$ 的兩個因子，而 k 部分約去一個。對奇數 k，$k(k-1)$ 的和由 $k = 3$ 開始（在 $k = 1$ 時該項為零），而 $k-2$ 取遍 $1, 3, 5, \ldots$：

$$\sum_{k \text{ 為奇數}} k(k-1)\frac{\lambda^k}{k!} = \lambda^2 \sum_{k \text{ 為奇數}, k\geq 3} \frac{\lambda^{k-2}}{(k-2)!} = \lambda^2\beta, \qquad \sum_{k \text{ 為奇數}} k\,\frac{\lambda^k}{k!} = \lambda\alpha$$

（第二個和就是第 (i) 部分中的那個）。因此

$$\mathrm{E}(X^2) = \mathrm{e}^{-\lambda}\left(\lambda\alpha + \lambda^2\beta\right) = \frac{\lambda\alpha + \lambda^2\beta}{\alpha+\beta},$$

再減去 $\mathrm{E}(X)^2$，得

$$\mathrm{Var}(X) = \frac{\lambda\alpha + \lambda^2\beta}{\alpha+\beta} - \frac{\lambda^2\alpha^2}{(\alpha+\beta)^2},$$

正如所求。

對 Y 而言，奇偶性（parity）互換。對偶數 k，$k(k-1)$ 的和由 $k = 2$ 開始，$k-2$ 取遍 $0, 2, 4, \ldots$，結果是 $\lambda^2\alpha$。k 的和則如第 (i) 部分一樣給出 $\lambda\beta$。所以

$$\mathrm{Var}(Y) = \frac{\lambda\beta + \lambda^2\alpha}{\alpha+\beta} - \frac{\lambda^2\beta^2}{(\alpha+\beta)^2}.$$

最後一問。 由於 $X + Y = U$，我們有 $\mathrm{Var}(X+Y) = \mathrm{Var}(U) = \lambda$。把兩個方差（variance）相加，

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}(X) + \mathrm{Var}(Y) &= \frac{\lambda(\alpha+\beta) + \lambda^2(\alpha+\beta)}{\alpha+\beta} - \frac{\lambda^2(\alpha^2+\beta^2)}{(\alpha+\beta)^2} \\ &= \lambda + \lambda^2\,\frac{(\alpha+\beta)^2 - \alpha^2 - \beta^2}{(\alpha+\beta)^2} = \lambda + \frac{2\lambda^2\alpha\beta}{(\alpha+\beta)^2}.\end{aligned}$$

> **想一想** 為甚麼我們應該預期兩邊不相等？

一般而言，$\mathrm{Var}(X+Y) = \mathrm{Var}(X) + \mathrm{Var}(Y) + 2\,\mathrm{Cov}(X,Y)$。此處 $XY = 0$ 恆成立，因為 X、Y 之中最多只有一個非零。所以 $\mathrm{Cov}(X,Y) = -\mathrm{E}(X)\mathrm{E}(Y) = -\lambda^2\alpha\beta/(\alpha+\beta)^2$，與

上面的計算吻合。要等式成立，便需要 $\lambda^2\alpha\beta = 0$。然而對 $\lambda > 0$，有 $\alpha \geq 1$ 及 $\beta \geq \lambda > 0$，所以 $\lambda^2\alpha\beta > 0$。因此**不存在非零的 λ 值**使 $\mathrm{Var}(X) + \mathrm{Var}(Y) = \mathrm{Var}(X+Y)$：左邊總是嚴格較大。事實上 $\alpha = \cosh\lambda$，$\beta = \sinh\lambda$，所以多出的部分是 $\lambda^2 \sinh 2\lambda / \mathrm{e}^{2\lambda} = \frac{1}{2}\lambda^2\left(1 - \mathrm{e}^{-4\lambda}\right)$。

驗算

- 當 $\lambda \to 0$ 時，U 幾乎總是 0 或 1，所以 Y 幾乎總是 0。的確，$\mathrm{E}(Y) \approx \lambda^2 \to 0$，而 $\mathrm{E}(X) \approx \lambda$。
- 當 λ 很大時，$\alpha \approx \beta \approx \frac{1}{2}\mathrm{e}^{\lambda}$，所以 $\mathrm{E}(X) \approx \mathrm{E}(Y) \approx \frac{1}{2}\lambda$：奇數值與偶數值變得同樣可能出現。
- 在 $\lambda = 1$ 時，直接把泊松概率相加，得 $\mathrm{Var}(X) \approx 0.6778$ 及 $\mathrm{Var}(Y) \approx 0.8131$，所以兩者之和比 $\mathrm{Var}(U) = 1$ 多出約 $0.4908 = \frac{1}{2}(1 - \mathrm{e}^{-4})$。兩條公式都吻合。

常見錯誤

- 約去之後弄錯奇偶：若 k 是奇數，則 $k-1$ 是偶數（給出 α），而 $k-2$ 是奇數（給出 β）。
- 忘記 $\mathrm{e}^{-\lambda} = 1/(\alpha+\beta)$，以致答案不是題目要求的形式。
- 假設方差可以直接相加。X 和 Y 遠非獨立(independent)：知道 $X \neq 0$ 便迫使 $Y = 0$。

STEP 之外

把一個級數分拆成偶數部分和奇數部分，就是分解式 $\mathrm{e}^{\lambda} = \cosh\lambda + \sinh\lambda$。借助概率母函數(probability generating functions)，這變成例行手續：$G(s)$ 的偶數部分是 $\frac{1}{2}\big(G(s) + G(-s)\big)$。最後用到的協方差（covariance）恆等式，是大學概率課程最早接觸的工具之一。Grimmett 與 Welsh 合著的 *Probability: An Introduction*（《概率導論》）同時涵蓋母函數和協方差。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。