詳細解答

STEP II 2013，第 11 題

力學 • 連續碰撞

STEP II 2013，第 11 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

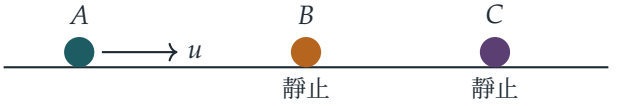
step.maths.org/questions/13-s2-q11

關鍵思路

這裏每一次碰撞（collision）都發生在兩個質量相等的質點之間，所以每次都是同一個小計算：動量守恆（conservation of momentum）加上牛頓恢復定律（Newton's law of restitution）。先做一次一般情況，之後重複套用即可。會否再發生碰撞，只取決於後面的質點是否比前面的質點移動得快，因此整道題歸結為比較速度。

解答

把這些質點視為在光滑（smooth）平面上、質量均為 m 的相同質點，因此在兩次碰撞之間沒有水平力作用，每個質點都以等速移動。沿直線依次稱它們為 A、B、C，其中 A 是被射向 B 和 C 的那個質點。取 A 初始運動的方向為正方向。



一般的碰撞

假設一個速度為 p 的質點追上前方一個速度為 $q < p$ 的相同質點，碰撞後兩者速度分別為 p' 和 q'。由動量守恆（約去 m）及恢復定律得

$$p' + q' = p + q, \qquad q' - p' = e(p - q).$$

兩式相加及相減，

$$p' = \tfrac{1}{2}[(p+q) - e(p-q)], \qquad q' = \tfrac{1}{2}[(p+q) + e(p-q)]. \tag{$*$}$$

由於 $e > 0$ 且 $p > q$，我們總有 $q' > p'$：碰撞後前方的質點比後方的移動得快，所以除非有其他因素改變其中一個的速度，這兩個質點不可能再相遇。

第 (i) 部分

第一次碰撞（A 撞 B）：在 $(*)$ 中代入 $p = u$、$q = 0$：

$$v_A = \tfrac{1}{2}u(1-e), \qquad v_B = \tfrac{1}{2}u(1+e).$$

此時 $v_B > v_A$，所以 A 追不上 B；但 B 正向靜止的 C 移動，所以第二次碰撞是 B 撞 C。

第二次碰撞（B 撞 C）：代入 $p = \tfrac{1}{2}u(1+e)$、$q = 0$：

$$v_B = \tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{1}{2}u(1+e)(1-e) = \tfrac{1}{4}u(1-e^2), \qquad v_C = \tfrac{1}{4}u(1+e)^2.$$

A 沒有受到影響，所以仍然是 $v_A = \tfrac{1}{2}u(1-e)$。三個速度都是正數（因為 $0 < e < 1$），所以速率分別為 $\tfrac{1}{2}u(1-e)$、$\tfrac{1}{4}u(1-e^2)$、$\tfrac{1}{4}u(1+e)^2$，正如所求。

第三次碰撞。C 比 B 快（由 $(*)$），所以 B 和 C 會分開。唯一可能的下一次碰撞是 A 追上 B，而這恰好在 $v_A > v_B$ 時發生：

$$v_A - v_B = \tfrac{1}{4}u(1-e)[2-(1+e)] = \tfrac{1}{4}u(1-e)^2 > 0,$$

因為 $e \neq 1$。所以 A 在 B 後方且移動得比 B 快，對於 $0 < e < 1$ 中的每一個 e，第三次碰撞（A 撞 B）都會發生。

第 (ii) 部分

第三次碰撞（A 撞 B）：此時 $p = \tfrac{1}{2}u(1-e)$、$q = \tfrac{1}{4}u(1-e^2)$，所以

$$p+q = \tfrac{1}{4}u(1-e)[2+(1+e)] = \tfrac{1}{4}u(1-e)(3+e), \qquad p-q = \tfrac{1}{4}u(1-e)^2.$$

由 $(*)$，B 的新速度為

$$\begin{aligned} v_B &= \tfrac{1}{2}\left[\tfrac{1}{4}u(1-e)(3+e) + \tfrac{1}{4}eu(1-e)^2\right] \\ &= \tfrac{1}{8}u(1-e)[3+e+e-e^2] \\ &= \tfrac{1}{8}u(1-e)(3+2e-e^2) = \tfrac{1}{8}u(1-e)(1+e)(3-e), \end{aligned}$$

而（為求完整）$v_A = \tfrac{1}{8}u(1-e)[3+e-e(1-e)] = \tfrac{1}{8}u(1-e)(3+e^2)$，它小於 v_B。

想一想 第三次碰撞之後，哪些質點對有可能再次碰撞？

A 和 B 剛剛碰撞過，所以由 $(*)$，B 現在比 A 快，兩者正在分開。C 仍以 $\tfrac{1}{4}u(1+e)^2$ 移動，而 C 前方再沒有其他質點。所以第四次碰撞發生若且唯若 B 追上 C，即若且唯若

$v_B > v_C$：兩邊除以 $\frac{1}{8}u(1+e) > 0$，

$$\begin{aligned}\tfrac{1}{8}u(1-e)(1+e)(3-e) > \tfrac{1}{4}u(1+e)^2 &\iff (1-e)(3-e) > 2(1+e)\\ &\iff e^2 - 6e + 1 > 0.\end{aligned}$$

二次式 $e^2 - 6e + 1$ 的根為 $e = 3 \pm 2\sqrt{2}$，它在兩根以外取正值。較大的根 $3 + 2\sqrt{2}$ 大於 1，而 $3 - 2\sqrt{2} \approx 0.172$ 位於 $(0, 1)$ 之內。所以，對於 $0 < e < 1$，

$$\text{發生第四次碰撞} \iff e < 3 - 2\sqrt{2}.$$

當 $e = 3 - 2\sqrt{2}$ 時，B 和 C 以相同速度移動，永不相遇，所以不等式（inequality）是嚴格的。

驗算

- 動量：第二次碰撞後總動量為 $\frac{1}{4}u\left[2(1-e) + (1-e^2) + (1+e)^2\right] = \frac{1}{4}u \cdot 4 = u$，與預期相符。
- 極限情況：當 $e \to 1$ 時，兩次碰撞後的速度趨向 0、0、u（即大家熟悉的「牛頓擺（Newton's cradle）」式速度交換），而 $v_A - v_B \to 0$，所以第三次碰撞僅僅勉強發生；臨界值 $3 - 2\sqrt{2}$ 遠小於 1，與此一致。
- 數值上，取 $e = 0.1$，第三次碰撞後的速度為 $v_B \approx 0.3589u$ 和 $v_C = 0.3025u$，所以 B 確實追上 C；取 $e = 0.2$，$v_B = 0.336u < v_C = 0.36u$，則追不上。以電腦模擬這個運動，證實了對每個 $e > 0.1716$ 恰好有三次碰撞，而低於此值則至少有四次。

常見錯誤

- 忘記說明下一次碰撞的是哪一對質點。每次都要檢查剛碰撞過的兩個質點正在分開，而餘下的一對正在接近。
- 恢復定律中的符號弄錯：應為（分離速率）$= e \times$（接近速率），所以 $q' - p' = e(p - q)$，左邊先寫前方質點的速度。
- 保留了根 $3 + 2\sqrt{2}$，但它在容許範圍 $0 < e < 1$ 之外。

STEP 之外

規則 $(*)$ 是一個線性映射（linear map），把碰撞前的一對速度映射到碰撞後的一對速度，所以一連串碰撞就是矩陣（matrix）的乘積；問總共會發生多少次碰撞是一個經典問題，對於彈性（elastic）桌球系統，把運動「展開」成楔形區域中的一條直線，便可得

到一個優美的幾何答案。若想看以大學程度的嚴謹處理碰撞、動量及參考系（frames of reference），可參閱 Kleppner 與 Kolenkow 的 *An Introduction to Mechanics*（《力學導論》）。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。