詳細解答

STEP II 2013，第 10 題

力學 • 拋體運動

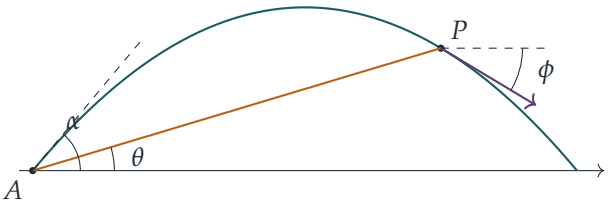
STEP II 2013，第 10 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

step.maths.org/questions/13-s2-q10

關鍵思路

寫出時間 t 時的位置和速度，便會發現 $\tan\theta$ 和 $\tan\phi$ 都是 t 的線性（linear）函數。(i) 中的恆等式（identity）隨即得出，而它把 B 和 C 都轉化為關於角的正切的陳述。由於兩個角都隨時間穩定地減小，「哪一點先到」不過是比較兩個數的大小，而 (i) 讓我們只需在 B 這一點上作比較。



在一般的點 P，θ 是從 A 看 P 的仰角（angle of elevation），而 ϕ 是速度與水平方向所成的角（圖中為負值，因為質點正在下落）。

解答

我們把質點模型化為只受重力 g 作用而自由運動，不計空氣阻力（air resistance）。設質點在時間 $t = 0$ 以速率 u 拋出，其中 $0 < \alpha < 90°$。以 A 為原點，在時間 t 時

$$x = ut\cos\alpha, \qquad y = ut\sin\alpha - \tfrac{1}{2}gt^2, \qquad \dot{x} = u\cos\alpha, \qquad \dot{y} = u\sin\alpha - gt.$$

當 $y = 0$ 再次成立時質點落地，此時 $t = 2u\sin\alpha/g$。

第 (i) 部分

當 $t > 0$ 時，從 A 看質點的仰角滿足

$$\tan\theta = \frac{y}{x} = \frac{ut\sin\alpha - \frac{1}{2}gt^2}{ut\cos\alpha} = \tan\alpha - \frac{gt}{2u\cos\alpha},$$

而運動方向滿足

$$\tan\phi = \frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{u\sin\alpha - gt}{u\cos\alpha} = \tan\alpha - \frac{gt}{u\cos\alpha}.$$

把第一式乘以 2，再利用第二式，

$$2\tan\theta = 2\tan\alpha - \frac{gt}{u\cos\alpha} = \tan\alpha + \left(\tan\alpha - \frac{gt}{u\cos\alpha}\right) = \tan\alpha + \tan\phi,$$

得證。

值得記下稍後會用到的結果：記 $k = \dfrac{g}{u\cos\alpha} > 0$，

$$\tan\theta = \tan\alpha - \tfrac{1}{2}kt, \qquad \tan\phi = \tan\alpha - kt, \tag{$*$}$$

因此 $\tan\theta$ 和 $\tan\phi$ 都隨時間嚴格遞減。在整個飛行過程中，θ 由 α 減至 0，ϕ 由 α 減至 $-\alpha$，所以 $\theta = \frac{1}{2}\alpha$ 和 $\phi = -\frac{1}{2}\alpha$ 各恰好出現一次：B 和 C 的定義是明確的。

第 (ii) 部分

記 $T = \tan\frac{1}{2}\alpha$；由於 $0 < \frac{1}{2}\alpha < 45°$，我們有 $0 < T < 1$。在 B，$\tan\theta = T$。在 C，$\tan\phi = \tan(-\frac{1}{2}\alpha) = -T$。若 B 和 C 是同一點，則兩式在該點同時成立，由 (i) 得

$$2T = \tan\alpha - T, \qquad \text{即} \qquad \tan\alpha = 3T.$$

由二倍角公式（double-angle formula）$\tan\alpha = \dfrac{2T}{1-T^2}$，故

$$\frac{2T}{1-T^2} = 3T \implies 2 = 3(1-T^2) \implies T^2 = \tfrac{1}{3},$$

其中我們除以了 T，這是容許的，因為 $T > 0$。取正根，$\tan\frac{1}{2}\alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}$，所以 $\frac{1}{2}\alpha = 30°$，且

$$\alpha = 60°.$$

第 (iii) 部分

> **想一想** 不計算兩個時間，怎樣判斷哪一點先到達？

由 $(*)$，ϕ 在整個飛行過程中遞減。因此 C 在 B 之後到達，當且僅當質點位於 B 的那一刻，ϕ 尚未減至 $-\frac{1}{2}\alpha$；即當 $\tan\phi_B > -T$ 時，其中 ϕ_B 是質點在 B 的運動方向。

在 B，由第 (i) 部分得 $\tan\phi_B = 2\tan\theta - \tan\alpha = 2T - \tan\alpha$。因此

$$B \text{ 先到達} \iff 2T - \tan\alpha > -T \iff \tan\alpha < 3T.$$

再次利用 $\tan\alpha = \dfrac{2T}{1-T^2}$，並除以 $T > 0$、乘以 $1 - T^2 > 0$（這樣不等式的方向不變），

$$\frac{2T}{1-T^2} < 3T \iff 2 < 3 - 3T^2 \iff T^2 < \tfrac{1}{3} \iff \tfrac{1}{2}\alpha < 30^\circ,$$

最後一步成立是因為 tan 在 $(0^\circ, 45^\circ)$ 上遞增。每一步都可逆，所以

$$\alpha < 60^\circ \iff B \text{ 比 } C \text{ 先到達.}$$

所以，既然 $\alpha < 60^\circ$，質點會先到達 B。

若你偏好明確寫出時間：由 $(*)$，$kt_B = 2(\tan\alpha - T)$ 及 $kt_C = \tan\alpha + T$，而 $t_B < t_C$ 同樣等價於 $\tan\alpha < 3T$。

驗算

- 在 $t = 0$ 時，$(*)$ 中兩條公式都給出 $\tan\alpha$，理應如此：剛拋出時質點沿拋射方向的直線運動。落地時 $kt = 2\tan\alpha$，得 $\tan\theta = 0$ 及 $\tan\phi = -\tan\alpha$，這正是軌跡為人熟知的對稱性。
- 當 $\alpha = 60^\circ$ 時，$\tan\alpha = \sqrt{3} = 3\tan 30^\circ$，與 (ii) 一致。
- 取 $u = 10\,\mathrm{m\,s^{-1}}$、$g = 9.8\,\mathrm{m\,s^{-2}}$ 及 $\alpha = 45^\circ$，公式給出 $t_B \approx 0.845\,\mathrm{s}$ 及 $t_C \approx 1.020\,\mathrm{s}$，所以 B 先到；以電腦逐步數值模擬運動，得出相同的時間，並確認當 $\alpha = 61^\circ$、75° 及 85° 時 C 先到。

常見錯誤

- 把 θ（質點相對於 A 的方向）當作 ϕ（質點速度的方向）。兩者只在拋出的一刻相同。
- 在 C 弄錯符號：該處 $\tan\phi = -\tan\tfrac{1}{2}\alpha$，而不是 $+\tan\tfrac{1}{2}\alpha$。
- 在 (iii) 中直接斷言答案，卻沒有解釋為何「$\tan\phi_B > -T$」表示 B 先到。支持這一點的正是 ϕ 的單調遞減（monotonic decrease）。

STEP 之外

(i) 中的恆等式說明：從 A 到拋物線（parabola）上任一點的弦（chord），其斜率等於兩端點切線斜率的平均值，這是二次函數的特殊性質（相當於均值定理（mean value theorem），而且中間點被準確定在正中）。在大學一年級的力學課程中，研究斜面（inclined

plane）上的拋射體（projectile）問題時會遇到同樣的想法，那裏從拋出點出發的直線所成的角，所扮演的角色正與這裏的 θ 完全相同。Kleppner 和 Kolenkow 的 *An Introduction to Mechanics*（《力學導論》）是很好的參考書，可看到拋射體問題以這種嚴謹方式處理。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。