詳細解答

STEP II 2013，第 1 題

純數學 • 對數曲線的弦

> **STEP II 2013，第 1 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/13-s2-q1

本題在 *Beyond STEP* 第 3.5 節 π^e 還是 e^π？中有完整的引導式講解：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/ch03/pi-e-or-e-pi.html

關鍵思路

這裏每一條不等式，都是比較 p^q 與 q^p。取對數（logarithm）再除以 pq，就變成比較 $\frac{\ln p}{p}$ 與 $\frac{\ln q}{q}$；而 $\frac{\ln x}{x}$ 正是由原點連到曲線上點 $(x, \ln x)$ 的直線的斜率（gradient）。因此整道題都圍繞與 $y = \ln x$ 相交的直線和弦（chord）。我們需要的事實是：這條曲線是凹（concave）的（即向下彎曲），而且由原點出發的切線（tangent）在 $x = \mathrm{e}$ 處與曲線相切。

解答

第 (i) 部分

設 $y = mx$ 在 $x = x_0$ 處與 $y = \ln x$ 相切。兩者斜率相同，而且曲線相交，所以

$$m = \frac{1}{x_0}, \qquad mx_0 = \ln x_0.$$

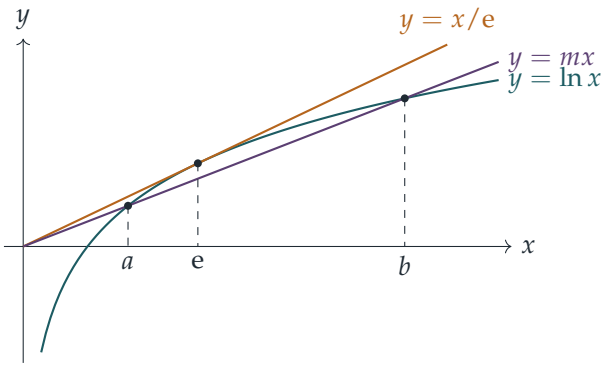
由第一條方程得 $mx_0 = 1$，所以 $\ln x_0 = 1$，$x_0 = \mathrm{e}$，以及

$$m = \frac{1}{\mathrm{e}}.$$

現在設 $y = mx$ 與曲線相交於 $x = a$ 及 $x = b$。那麼 $\ln a = ma$ 及 $\ln b = mb$，所以（因為 $a, b > 0$）

$$\frac{\ln a}{a} = m = \frac{\ln b}{b} \implies b \ln a = a \ln b \implies \ln\left(a^b\right) = \ln(b^a),$$

由於 ln 是一一對應（one-to-one）的，故 $a^b = b^a$，得證。



關於草圖：若 $m \le 0$，由於此時 $\ln x - mx$ 嚴格遞增，直線與曲線最多只相交一次。若 $m \ge \frac{1}{\mathrm{e}}$，則對 $x > 0$ 而言，直線就是那條切線或位於切線之上；而凹曲線位於其切線 $y = x/\mathrm{e}$ 之下，只在 e 處相切，所以同樣不會有兩個交點。因此 $0 < m < \frac{1}{\mathrm{e}}$，直線 $y = mx$ 位於切線之下，如圖所示。在 $x = \mathrm{e}$ 處，曲線的高度是 1，直線的高度是 $m\mathrm{e} < 1$，所以該處曲線在直線之上。由於曲線是凹的而直線是直的，$\ln x - mx$ 是凹函數。因此它取正值的集合是單一個區間，其兩端正是兩個交點 a 和 b。這個區間包含 e，所以 $a < \mathrm{e} < b$。

第 (ii) 部分

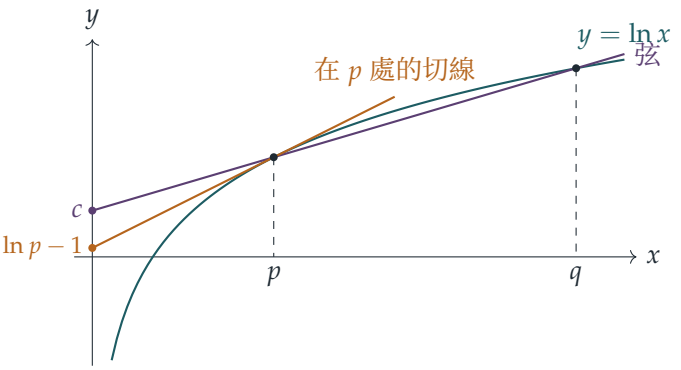
這裏 $\ln p = mp + c$ 及 $\ln q = mq + c$，其中 $0 < p < q$。分別除以 p 和 q，得

$$\frac{\ln p}{p} = m + \frac{c}{p}, \qquad \frac{\ln q}{q} = m + \frac{c}{q}.$$

由於 $c > 0$ 且 $\frac{1}{p} > \frac{1}{q}$，我們有 $\frac{c}{p} > \frac{c}{q}$，所以 $\frac{\ln p}{p} > \frac{\ln q}{q}$。乘以 $pq > 0$ 得 $q \ln p > p \ln q$，即 $\ln(p^q) > \ln(q^p)$，因此 $p^q > q^p$。

從圖像上看，由原點連到 $(p, \ln p)$ 和 $(q, \ln q)$ 的直線，斜率分別是 $\frac{\ln p}{p}$ 和 $\frac{\ln q}{q}$。若弦在原點上方與 y 軸相交，則較近的那一點與 O 所連的直線較陡。（c 的正負決定不等式的方向。我們在第 (iv) 部分會再用到這一點。）

第 (iii) 部分



設經過 $P = (p, \ln p)$ 和 $Q = (q, \ln q)$ 的弦的斜率為 s，y 截距（intercept）為 c，所以 $c = \ln p - sp$。由於曲線是凹的，由 P 連到更右方一點的弦，比 P 處的切線平緩，所以

$$s < \frac{1}{p}.$$

（又或者，由中值定理（mean value theorem），對某個 $\xi \in (p, q)$ 有 $s = \frac{1}{\xi}$，而 $\frac{1}{\xi} < \frac{1}{p}$。）$P$ 處的切線是 $y = \ln p + \frac{1}{p}(x - p)$，它與 y 軸相交於 $\ln p - 1$。弦和切線都經過 P，而弦較平緩。所以由 P 向左移到 $x = 0$ 的過程中，弦一直在切線之上：

$$c = \ln p - sp > \ln p - 1 \geq 0,$$

最後一步用了 $p \geq \mathrm{e}$。所以弦在 y 取正值之處與 y 軸相交。

? **想一想** 這樣如何判斷 π^{e} 與 e^{π} 的大小？

取 $p = \mathrm{e}$ 和 $q = \pi$，它們滿足 $\mathrm{e} \leq p < q$。這條弦的 $c > 0$，所以可應用第 (ii) 部分，得 $p^q > q^p$：

$$\mathrm{e}^{\pi} > \pi^{\mathrm{e}}.$$

第 (iv) 部分

現在經過 $(p, \ln p)$ 和 $(q, \ln q)$ 的弦的斜率是 $\frac{1}{\mathrm{e}}$，所以它是 $y = \frac{x}{\mathrm{e}} + c$，其中

$$c = \ln p - \frac{p}{\mathrm{e}}.$$

直線 $y = \frac{x}{\mathrm{e}}$ 就是第 (i) 部分中在 $x = \mathrm{e}$ 處的切線，而凹曲線位於它之上或之下——準確地說是在它上面或下方，即 $\ln x \leq \frac{x}{\mathrm{e}}$，等號只在 $x = \mathrm{e}$ 時成立。所以 $c \leq 0$，而 $c = 0$ 只在 $p = \mathrm{e}$ 時出現。但 $c = 0$ 會令弦就是切線本身，而切線只在 e 處與曲線相交，並非在兩點 $p < q$ 相交。因此

$$c < 0.$$

這條弦與切線平行，並位於切線之下。現在把第 (ii) 部分的論證反轉符號再做一次：

$$\frac{\ln p}{p} = \frac{1}{\mathrm{e}} + \frac{c}{p}, \qquad \frac{\ln q}{q} = \frac{1}{\mathrm{e}} + \frac{c}{q}.$$

由於 $c < 0$ 且 $\frac{1}{p} > \frac{1}{q}$，得 $\frac{c}{p} < \frac{c}{q}$，所以 $\frac{\ln p}{p} < \frac{\ln q}{q}$。乘以 $pq > 0$ 得 $q \ln p < p \ln q$，因此

$$q^p > p^q.$$

（與第 (i) 部分一樣，凹性在這裏也迫使 $p < \mathrm{e} < q$，但論證並不需要這一點。）

驗算

- $\mathrm{e}^{\pi} \approx 23.14$ 而 $\pi^{\mathrm{e}} \approx 22.46$，與第 (iii) 部分一致。
- 第 (i) 部分：$a = 2$、$b = 4$ 這一對滿足 $2^4 = 4^2$，而且確實 $\frac{\ln 2}{2} = \frac{\ln 4}{4}$ 及 $2 < \mathrm{e} < 4$。
- 第 (iv) 部分：取 $p = 1$，由弦的斜率 $\frac{\ln q}{q-1} = \frac{1}{\mathrm{e}}$ 得 $q \approx 5.76$。於是 $q^p \approx 5.76 > 1 = p^q$。
- 第 (ii) 和第 (iii) 部分亦已用電腦對大量隨機的弦作檢驗確認。

常見錯誤

- 把 $q \ln p > p \ln q$ 的方向弄反。乘以 pq 之前，先清楚寫出 $\frac{\ln p}{p} > \frac{\ln q}{q}$。
- 在第 (iii) 部分，只寫到「曲線是凹的」便停下，沒有解釋為何截距是正數。p 處的切線與軸相交於 $\ln p - 1 \geq 0$，而弦在它之上穿過。
- 在第 (iv) 部分，忘記排除 $c = 0$，而這是得到嚴格不等式所必需的。

STEP 之外

函數 $\frac{\ln x}{x}$ 在 e 處取得最大值，這解釋了著名的一對 $2^4 = 4^2$。方程 $x^y = y^x$ 在 $x \neq y$ 時的正數解構成一條曲線，可以參數化（parametrise）為 $x = t^{1/(t-1)}$、$y = t^{t/(t-1)}$。更一般地說，「凹函數的弦位於曲線之下、切線之上」是凸性（convexity）的基本不等式。它是延森不等式（Jensen's inequality）和算術–幾何平均不等式（AM–GM inequality）的基礎。Bartle 與 Sherbert 的 *Introduction to Real Analysis*（《實分析導論》）對中值定理和凸函數有仔細的論述。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。