詳細解答

STEP I 2013，第 9 題

力學 • 拋體與碰撞

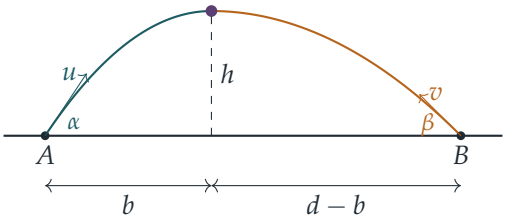
> **STEP I 2013，第 9 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/13-s1-q9

關鍵思路

拋射體（projectile）在飛行的最高點沒有鉛直速度，所以若在該處發生碰撞，之後落回地面所需的時間就等於上升所用的時間。要落回出發點，每個質點必須在同樣的時間內走回原來的水平路程，這就迫使它的水平速度剛好反向。把這一點代入動量守恆（conservation of momentum），再利用兩個質點在同一時刻到達最高點這個事實，其餘結果便順理成章。

解答

我們把 A 和 B 視為只受重力作用而自由運動的質點，不計空氣阻力（air resistance），而碰撞時的衝量（impulse）沿連心線（line of centres）作用。由於這是直接碰撞（direct collision），而碰撞一刻兩個質點都在水平運動，所以這個衝量是水平的。取 x 軸沿平面、由 A 的出發點指向 B 的出發點，於是 B 從 $x = d$ 出發。



在最高點相遇

A 的鉛直速度是 $u\sin\alpha - gt$，所以它在時間 $t = u\sin\alpha/g$ 到達最大高度。同理，B 在 $t = v\sin\beta/g$ 時最高。兩者同時拋出，並在各自處於最高點時相撞，因此這兩個時間相

等：

$$T = \frac{u\sin\alpha}{g} = \frac{v\sin\beta}{g}, \qquad \text{所以} \qquad u\sin\alpha = v\sin\beta. \tag{1}$$

碰撞前一刻，A 的速度是沿正 x 方向的 $u\cos\alpha$，B 的速度是沿負 x 方向的 $v\cos\beta$；兩者都沒有鉛直速度。

碰撞之後

想一想 我們對恢復係數（coefficient of restitution）一無所知，又怎能對碰撞後的速度說出甚麼來？

關鍵在於「返回原點」這個條件。衝量是水平的，所以碰撞後一刻 A 的鉛直速度仍然是零，位置在平面上方高度 h 處。（在鉛直方向上）由靜止下落 h 所需的時間，恰好等於上升 h 所用的時間，即 T。在這段時間內，A 必須在水平方向由 $x = b$ 回到 $x = 0$，其中 $b = u\cos\alpha\, T$ 是它上升途中走過的水平距離。所以它新的水平速度是

$$-\frac{b}{T} = -u\cos\alpha:$$

A 的水平速度剛好反向，同理 B 的也是如此。（事實上，每個質點都沿自己原來的路徑倒退回去。）

現在，x 方向的動量守恆給出

$$mu\cos\alpha - Mv\cos\beta = -mu\cos\alpha + Mv\cos\beta, \qquad \text{所以} \qquad mu\cos\alpha = Mv\cos\beta. \tag{2}$$

換言之，碰撞前後的總動量都是零。以 (1) 除 (2)——這是容許的，因為 α 和 β 都嚴格介於 0 與 $\frac{1}{2}\pi$ 之間，所以 (1) 的兩邊都不為零——得

$$m\cot\alpha = M\cot\beta,$$

此即所求。

碰撞發生的位置

在時間 T 內，A 走過水平距離 $b = u\cos\alpha\, T$，B 則走過 $v\cos\beta\, T$。兩者合起來剛好走完兩者之間的距離，所以

$$u\cos\alpha\, T + v\cos\beta\, T = d.$$

由 (2)，$v\cos\beta = \dfrac{m}{M}u\cos\alpha$，所以

$$b\left(1 + \frac{m}{M}\right) = d \qquad \Longrightarrow \qquad b = \frac{Md}{m+M},$$

此即所求。（B 越重，它的水平速度就越慢，相遇點便離 A 的出發點越遠。）

碰撞的高度

對 A 在鉛直方向使用 $v^2 = u^2 + 2as$，得最大高度為

$$h = \frac{u^2 \sin^2 \alpha}{2g}, \qquad \text{而} \qquad b = u\cos\alpha \cdot \frac{u \sin\alpha}{g} = \frac{u^2 \sin\alpha\cos\alpha}{g}.$$

兩式相除，

$$\frac{h}{b} = \frac{\sin\alpha}{2\cos\alpha} = \tfrac{1}{2}\tan\alpha, \qquad \text{所以} \qquad h = \tfrac{1}{2} b \tan\alpha.$$

驗算

- 對稱性：當 $m = M$ 時，得 $\alpha = \beta$ 及 $b = \frac{1}{2}d$，所以兩個質點在正中間相遇，理應如此。
- 高度公式表明，由 A 的出發點到其路徑最高點的連線，斜率是 $\frac{1}{2}\tan\alpha$，即拋射時斜率的一半：這正是一個熟悉的事實——拋物線（parabola）在起點的切線與對稱軸（axis of symmetry）相交之處，高度是頂點高度的兩倍。對 B 作同樣的計算，得 $h = \frac{1}{2}(d - b)\tan\beta$；這與 $\frac{1}{2}b\tan\alpha$ 吻合，原因正是 $m\cot\alpha = M\cot\beta$。
- 數值驗證：取 $m = 1$、$M = 2$、$\alpha = 45°$、$u = 10\,\mathrm{m\,s^{-1}}$、$g = 9.8\,\mathrm{m\,s^{-2}}$。於是 $\cot\beta = \frac{1}{2}$，$v = \sqrt{50}/\sin\beta \approx 7.91\,\mathrm{m\,s^{-1}}$，$d \approx 7.65\,\mathrm{m}$，從而 $b = \frac{2}{3}d \approx 5.10\,\mathrm{m}$，$h = \frac{1}{2}b \approx 2.55\,\mathrm{m}$。用電腦把兩個運動逐步向前推算，並在碰撞時把水平速度反向，結果證實兩個質點確實在此點、各自處於最高點時相遇，而且都落回各自的出發點。

常見錯誤

- 試圖使用恢復係數：題目沒有給出，也根本不需要，因為返回原點的條件已經確定了碰撞後的速度。
- 忘記兩個質點必須同時到達最高點，而正是這一點給出 (1)；沒有它，就無法得出餘切（cotangent）。
- 動量方程中的正負號錯誤：碰撞前 B 是沿負方向運動的。

STEP 之外

返回原點的條件其實就是時間反演（time reversal）：在重力作用下，牛頓（Newton）的運動方程即使把時鐘倒轉，形式也不變，所以把質點的速度反向，它就會沿自己原來的路徑返回。這裏總動量為零，意味着我們身處質心參考系（centre-of-mass frame）之中；在這個參考系裏，彈性碰撞（elastic collision）只會把兩個速度反向，與這裏發生

的情況完全一樣（所以這次碰撞是完全彈性的）。質心參考系和守恆定律在 Kleppner 與 Kolenkow 合著的 *An Introduction to Mechanics*（《力學導論》）中有精彩的探討。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。