詳細解答

STEP I 2013，第 8 題

純數學 • 複合函數

> **STEP I 2013，第 8 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/13-s1-q8

關鍵思路

合成函數（composite function）pq 的意思是「先做 q，再做 p」，而且只有在 q 的輸出落在 p 的定義域（domain）之內時才有定義。因此，定義域來自 q（有需要時再加以收窄），而值域（range）則要問 p 實際上接收到哪些值才能求得。代數運算並不繁重；得分關鍵在於小心處理 $\sqrt{x^2} = |x|$ 以及各個定義域。在第 (iii) 部分，恆等式 $(x + \sqrt{x^2-1})(x - \sqrt{x^2-1}) = 1$ 幫了大部分的忙。

解答

第 (i) 部分

- $\mathrm{cb}(x) = \mathrm{c}(\ln x) = 2\ln x$。定義域就是 b 的定義域，即 $x > 0$，而 c 接受任何實數。由於 $\ln x$ 取遍所有實數值，$2\ln x$ 亦然：值域是 $\mathbb{R}$。
- $\mathrm{ab}(x) = (\ln x)^2$，定義域為 $x > 0$。由於 $\ln x$ 取遍所有實數值，其平方便取遍 $[0, \infty)$ 中的每個值（在 $x = 1$ 時取 0）：值域是 $y \geq 0$。
- $\mathrm{da}(x) = \sqrt{x^2} = |x|$，而不是 x，因為平方根號表示非負根（non-negative root）。這裏 $x^2 \geq 0$ 恆成立，所以定義域是整個 $\mathbb{R}$，值域是 $y \geq 0$。
- $\mathrm{ad}(x) = (\sqrt{x})^2 = x$，但只限於 $x \geq 0$，因為必須先由 d 作用。所以定義域是 $x \geq 0$，值域是 $y \geq 0$。

留意 da 和 ad 的值域相同，但定義域和公式都不同：它們是不同的函數。

第 (ii) 部分

對於 fg：對每個實數 x，$\mathrm{g}(x) = \sqrt{x^2+1} \geq 1$，所以 $\mathrm{g}(x)$ 總落在 f 的定義域內。於是

$$\mathrm{fg}(x) = \sqrt{(x^2+1)-1} = \sqrt{x^2} = |x|, \qquad \text{定義域}\mathbb{R}, \quad \text{值域}y \geq 0.$$

對於 gf：f 先作用，所以需要 $|x| \geq 1$；而 g 接受任何輸入。於是

$$\mathrm{gf}(x) = \sqrt{(x^2-1)+1} = |x|, \qquad \text{定義域}|x| \geq 1, \quad \text{值域}y \geq 1.$$

兩條公式同樣一致，但函數卻不同：gf 的定義域不包括 $-1 < x < 1$，因此其值域由 1 開始。

第 (iii) 部分

基本事實是

$$\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)\left(x-\sqrt{x^2-1}\right) = x^2-(x^2-1) = 1,$$

所以當 $x \geq 1$ 時，$\mathrm{h}(x)\,\mathrm{k}(x) = 1$。

h 的圖像（$x \geq 1$）。

- $\mathrm{h}(1) = 1$。
- 當 $x > 1$ 時，$\mathrm{h}'(x) = 1 + \dfrac{x}{\sqrt{x^2-1}} > 0$，所以 h 是遞增（increasing）的；而當 $x \to 1^+$ 時 $\mathrm{h}'(x) \to \infty$，所以曲線以垂直切線（vertical tangent）離開 $(1,1)$。
- 當 $x \to \infty$ 時，$\mathrm{h}(x) \to \infty$。至於漸近線（asymptote），

  $$\mathrm{h}(x) - 2x = \sqrt{x^2-1} - x = \frac{-1}{\sqrt{x^2-1}+x} \to 0^-,$$

  所以 $y = 2x$ 是一條漸近線，曲線從下方趨近它。

因此 h 由 1 開始連續遞增，且無上界：其值域是 $[1,\infty)$。

k 的圖像，$x \geq 1$ 的分支。

- $\mathrm{k}(1) = 1$，而且由基本事實，$\mathrm{k}(x) = 1/\mathrm{h}(x)$。
- 由於 h 是正數並遞增至無限大，k 是正數並遞減，且 $\mathrm{k}(x) \to 0^+$。所以 $y = 0$ 是一條漸近線，曲線從上方趨近它。
- 當 $x \to 1^+$ 時，$\mathrm{k}'(x) = 1 - \dfrac{x}{\sqrt{x^2-1}} \to -\infty$：在 $(1,1)$ 處同樣有一條垂直切線，這分支就在該點與 h 的圖像相接。

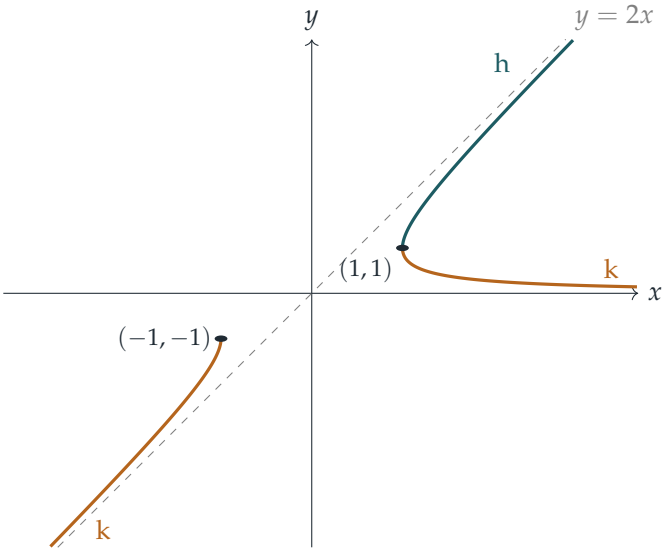
k 的圖像，$x \le -1$ 的分支。

- $\mathrm{k}(-1) = -1$。
- 當 $x < -1$ 時有 $x < 0$，所以 $\mathrm{k}'(x) = 1 - \dfrac{x}{\sqrt{x^2-1}} > 1 > 0$：k 是遞增的。當 $x \to -1^-$ 時，$\mathrm{k}'(x) \to +\infty$，所以在 $(-1,-1)$ 處有一條垂直切線。
- x 和 $-\sqrt{x^2-1}$ 都是負數，所以當 $x \to -\infty$ 時 $\mathrm{k}(x) \to -\infty$。設 $x = -u$，其中 $u \ge 1$，

$$\mathrm{k}(x) - 2x = u - \sqrt{u^2-1} = \frac{1}{u + \sqrt{u^2-1}} \to 0^+,$$

所以 $y = 2x$ 亦是這分支的漸近線，曲線從上方趨近它。

這分支取遍 $(-\infty, -1]$ 中的每個值。



（有一個巧妙的方法可以一次看清這一切：設 $x = \cosh t$，其中 $t \ge 0$。那麼 $\sqrt{x^2-1} = \sinh t$，所以 $\mathrm{h}(x) = e^t$ 而 $\mathrm{k}(x) = e^{-t}$；對於 $x = -\cosh t$，則 $\mathrm{k}(x) = -e^t$。）

合成函數 kh。 h 的定義域是 $x \ge 1$，而每個值 $\mathrm{h}(x)$ 都滿足 $\mathrm{h}(x) \ge 1$，落在 k 的定義域內。所以 kh 在整個 $x \ge 1$ 上都有定義。

想一想 kh 實際上用到 k 圖像的哪一部分？

只用到 $x \ge 1$ 的分支，因為 h 從不輸出小於 1 的值。此外，h 取遍 $[1,\infty)$ 中的每一個值，所以 kh 所取的值正好就是 k 在 $[1,\infty)$ 上的值。在這分支上，k 由 $\mathrm{k}(1) = 1$ 開始連續遞減趨向 0，但永遠達不到 0（因為 $\mathrm{k} = 1/\mathrm{h} > 0$）。因此

$$\mathrm{kh}: \quad \text{定義域} x \ge 1, \qquad \text{值域} 0 < y \le 1.$$

從雙曲函數（hyperbolic function）的角度看，$\mathrm{kh}(\cosh t) = \mathrm{k}(e^t)$，這是 t 的遞減函數，在 $t = 0$ 時由 1 開始。

驗算

- 代入數值：$\mathrm{h}(2) = 2 + \sqrt{3} \approx 3.732$，$\mathrm{k}(2) = 2 - \sqrt{3} \approx 0.268$；兩者之積為 1。另外 $\mathrm{k}(-2) = -2 - \sqrt{3} \approx -3.732$，略高於 $2x = -4$，正如漸近線分析所預測。
- $\mathrm{kh}(1) = \mathrm{k}(1) = 1$，而 $\mathrm{kh}(2) = \mathrm{k}(3.732\ldots) = 3.732 - \sqrt{3.732^2 - 1} \approx 0.136$，落在 $(0, 1]$ 之內。
- 當 $x = 1000$ 時，$\mathrm{h}(x) - 2x \approx -0.0005$，$\mathrm{k}(x) \approx 0.0005$，與 $-1/(2x)$ 和 $1/(2x)$ 吻合。

常見錯誤

- 寫成 $\sqrt{x^2} = x$。其實應是 $|x|$，這正是 da、fg 和 gf 都不是恆等函數（identity function）的原因。
- 因為最終公式 $|x|$ 處處有意義，便把 gf 的定義域寫成 $\mathbb{R}$。合成函數的定義域由最先作用的函數決定。
- 遺漏了 k 在 $x \leq -1$ 的第二個分支，或遺漏了它的漸近線 $y = 2x$。

STEP 之外

在大學裏，函數是一個三元組：定義域、上域（codomain）和對應法則。兩個法則相同但定義域不同的函數，例如這裏的 fg 和 gf，確實是不同的函數；一旦討論反函數（inverse function）、單射性（injectivity）和滿射性（surjectivity），這種嚴謹就變得非常重要。函數 h 就是 $e^{\operatorname{arcosh} x}$，而 $\ln \mathrm{h}(x)$ 正是 $\operatorname{arcosh} x$ 的標準公式。Abbott 的 *Understanding Analysis*（《理解分析》）正是以這種細緻的態度處理函數、連續性（continuity）和單調性（monotonicity）。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。