詳細解答

STEP I 2013，第 7 題

純數學 • 一階微分方程

> **STEP I 2013，第 7 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/13-s1-q7

關鍵思路

在 (i) 和 (ii) 中，右方只取決於比值 y/x，所以設 $y = ux$ 便可把方程化為可分離變數 (separation of variables) 的形式。第 (iii) 部分打破了這個模式，因為 x^2/y 並非單單是 y/x 的函數。解決方法是問：解「應該」表現得像 x 的哪一個冪？平衡兩項後得出 $y = u\,x^{3/2}$，於是一切又可以分離變數。

解答

第 (i) 部分

設 $y = ux$，由乘積法則 (product rule) 得 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = u + x\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$。由於 $x/y = 1/u$ 及 $y/x = u$，方程變為

$$u + x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{u} + u \quad\Longrightarrow\quad x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{u}.$$

u 項互相抵消，這正是這個代換 (substitution) 奏效的原因。分離變數（由於 $x > 0$，可以除以 x），

$$\int u\,\mathrm{d}u = \int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x \quad\Longrightarrow\quad \tfrac{1}{2}u^2 = \ln x + C,$$

因為 $x > 0$，所以寫 $\ln x$ 而非 $\ln|x|$。當 $x = 1$ 時 $y = 2$，所以 $u = y/x = 2$，得 $2 = 0 + C$。因此

$$u^2 = 4 + 2\ln x.$$

由於 $y > 0$ 及 $x > 0$，必有 $u > 0$，所以取正根 $u = \sqrt{4 + 2\ln x}$，從而

$$y = x\sqrt{4 + 2\ln x}.$$

這要求 $4+2\ln x>0$（我們需要 $y>0$，而不只是 $y\geq 0$），即 $\ln x>-2$，亦即 $x>\mathrm{e}^{-2}$。這就是所求的結果。

第 (ii) 部分

右方同樣是 y/x 的函數，所以用同一個代換 $y=ux$：

$$u+x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=\frac{1}{u}+2u \quad\Longrightarrow\quad x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=\frac{1}{u}+u=\frac{1+u^2}{u}.$$

這次 u 項沒有抵消，但變數仍然可以分離：

$$\int\frac{u}{1+u^2}\,\mathrm{d}u=\int\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x \quad\Longrightarrow\quad \tfrac{1}{2}\ln(1+u^2)=\ln x+C,$$

其中左方的積分屬 $\frac{1}{2}\int f'/f$ 的形式，而 $1+u^2>0$，無需加絕對值（modulus）。在 $x=1$ 時 $u=2$，所以 $C=\frac{1}{2}\ln 5$。乘以 2 再取指數，

$$1+u^2=5x^2, \qquad \text{所以} \qquad u=\sqrt{5x^2-1}$$

（因 $u>0$，取正根）。因此

$$y=x\sqrt{5x^2-1} \qquad (x>\tfrac{1}{\sqrt{5}}),$$

這個限制來自 $5x^2-1>0$ 及 $x>0$。

第 (iii) 部分

現在 $y=ux$ 給出 $x^2/y=x/u$，當中仍單獨含有 x，所以方程不能分離變數。我們想找一個代換，使右方兩項以相同方式縮放。

想一想 若 y 表現得像冪 x^k，k 取甚麼值時 $\dfrac{x^2}{y}$ 與 $\dfrac{2y}{x}$ 的大小相同？

我們需要 x^{2-k} 與 x^{k-1} 相配，所以 $2-k=k-1$，得 $k=\frac{3}{2}$。（此時左方的 $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x$ 亦表現得像 $x^{1/2}$，所以三項一致。）這啟示我們用代換 $y=u\,x^{3/2}$，此時

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=x^{3/2}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}+\tfrac{3}{2}u\,x^{1/2}, \qquad \frac{x^2}{y}=\frac{x^{1/2}}{u}, \qquad \frac{2y}{x}=2u\,x^{1/2}.$$

把整條方程除以 $x^{1/2}$（它是正數），

$$x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}+\tfrac{3}{2}u=\frac{1}{u}+2u \quad\Longrightarrow\quad x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=\frac{1}{u}+\frac{u}{2}=\frac{2+u^2}{2u}.$$

分離變數，

$$\int\frac{2u}{2+u^2}\,\mathrm{d}u=\int\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x \quad\Longrightarrow\quad \ln(2+u^2)=\ln x+C.$$

在 $x=1$ 時 $u=y/x^{3/2}=2$，所以 $C=\ln 6$，因此 $2+u^2=6x$。取正根 $u=\sqrt{6x-2}$，所以

$$y=x^{3/2}\sqrt{6x-2}=\sqrt{6x^4-2x^3}\qquad (x>\tfrac{1}{3}),$$

其中需要 $x>\frac{1}{3}$ 才能使 $6x-2>0$。

(iii) 的另一解法。把方程乘以 $2y$，並設 $z=y^2$，得

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}-\frac{4}{x}z=2x^2,$$

這是一條線性方程（linear equation），積分因子（integrating factor）為 x^{-4}。於是 $(x^{-4}z)'=2x^{-2}$，利用 $z(1)=4$ 得 $x^{-4}z=-2/x+6$，所以 $y^2=6x^4-2x^3$，與前相同。同一技巧（$z=y^2$）亦可解 (i) 和 (ii)。

驗算

- 每個答案在 $x=1$ 時都給出 $y=2$：$1\cdot\sqrt{4}$、$1\cdot\sqrt{4}$ 及 $\sqrt{6-2}$。
- 把 (ii) 的答案求導後代回原方程。由 $y^2=5x^4-x^2$ 得 $2yy'=20x^3-2x$，所以 $y'=(10x^3-x)/y$。另一方面 $\dfrac{x}{y}+\dfrac{2y}{x}=\dfrac{x^2+2y^2}{xy}=\dfrac{10x^4-x^2}{xy}$，兩者相同。
- 在 $x=2$ 時，三個解分別給出 $2\sqrt{4+2\ln 2}\approx 4.642$、$2\sqrt{19}\approx 8.718$ 及 $4\sqrt{5}\approx 8.944$。正如預期，(ii) 中 y/x 的係數較大，使 y 增長得比 (i) 快。

常見錯誤

- 在 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=u+x\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$ 中漏掉 u，以致關於 u 的方程出錯。
- 把初始條件（initial condition）套用在 y 而非 u 上：這裏在 $x=1$ 時兩者相同，但在 (iii) 中一般需要用 $u=y/x^{3/2}$。
- 遺漏定義域（domain）。平方根必須是實數且為正，因而得出 $x>\mathrm{e}^{-2}$、$x>1/\sqrt{5}$ 及 $x>\frac{1}{3}$。

STEP 之外

右方只取決於 y/x 的方程稱為齊次（homogeneous）方程，而代換 $y=ux$ 總能把它們分離變數。第 (iii) 部分其實是一種經過偽裝的縮放對稱性（scaling symmetry）：在 $x\mapsto\lambda x$、$y\mapsto\lambda^{3/2}y$ 之下方程不變，而這類縮放對稱性總會啟示一個使方程可分離變數的代換。形如 $y'+P(x)y=Q(x)y^n$ 的方程，在 $z=y^{1-n}$ 之下會變成線性方程，稱

為伯努利方程（Bernoulli equations）；這裏三部分都屬於此類，且 $n = -1$。Boyce 與 DiPrima 的 *Elementary Differential Equations*（《初等微分方程》）在一階方程一章中涵蓋了這兩類方程。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。