詳細解答

STEP I 2013，第 6 題

純數學 • 二項式係數與斐波那契數

> **STEP I 2013，第 6 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/13-s1-q6

關鍵思路

帕斯卡法則（Pascal's rule）就是整道題的引擎。每個 B_n 都是若干二項式係數（binomial coefficients）之和；若用帕斯卡法則把 B_{n+2} 的每一項拆開，拆出來的各部分正好可以重新組合成 B_{n+1} 和 B_n 的各項。唯一要小心的是和式的兩端：那裏帕斯卡法則並不適用，落單的 1 要靠人手配對。由於 B_n 對偶數和奇數 n 的定義不同，我們把兩種情況分開處理。

解答

帕斯卡法則

由於 $(1+x)^{n+1} = (1+x)(1+x)^n$，兩邊 x^r 的係數相等。左邊的係數是 $\binom{n+1}{r}$。右邊則是

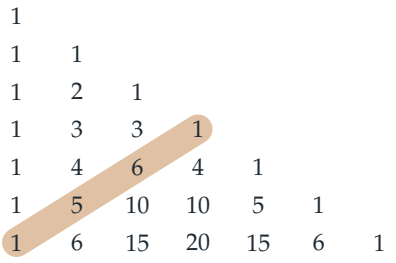
$$(1+x)\sum_{s=0}^{n}\binom{n}{s}x^s = \sum_{s=0}^{n}\binom{n}{s}x^s + \sum_{s=0}^{n}\binom{n}{s}x^{s+1},$$

當 $1 \le r \le n$ 時，第一個和式貢獻 $\binom{n}{r}$（來自 $s = r$），第二個和式貢獻 $\binom{n}{r-1}$（來自 $s = r-1$）。因此

$$\binom{n}{r} + \binom{n}{r-1} = \binom{n+1}{r} \qquad (1 \le r \le n).$$

遞推關係

先看清楚 B_n 是甚麼會有幫助：它把帕斯卡三角形（Pascal's triangle）的一條「淺對角線」加起來，即 $\binom{n}{0} + \binom{n-1}{1} + \binom{n-2}{2} + \cdots$，一直加到上方數字不小於下方數字的最後一項為止。把三角形靠左排列時，組成 $B_6 = 1+5+6+1 = 13$ 的各項落在一條直線上：



（琥珀色帶標出了 $\binom{6}{0}, \binom{5}{1}, \binom{4}{2}, \binom{3}{3}$。）

偶數情況，$n = 2m$（$m \geq 0$）。我們需要證明 $B_{2m+2} = B_{2m+1} + B_{2m}$。按定義

$$B_{2m+2} = \sum_{j=0}^{m+1} \binom{2m+2-j}{j}.$$

兩端的項是 $j = 0$，給出 $\binom{2m+2}{0} = 1$；以及 $j = m+1$，給出 $\binom{m+1}{m+1} = 1$。對於 $1 \leq j \leq m$，我們以上方 $2m+1-j$、下方 j 套用帕斯卡法則；這是容許的，因為 $j \leq m$ 推出 $j \leq 2m+1-j$。於是

$$B_{2m+2} = \underbrace{1 + \sum_{j=1}^{m} \binom{2m+1-j}{j}}_{\text{(a)}} + \underbrace{\sum_{j=1}^{m} \binom{2m+1-j}{j-1} + 1}_{\text{(b)}}.$$

在 (a) 中，那個 1 就是 $\binom{2m+1}{0}$，即缺少了的 $k = 0$ 項，所以 (a) 等於 $\sum_{k=0}^{m} \binom{2m+1-k}{k} = B_{2m+1}$。

? **想一想** 第二個和式應該變成甚麼？多出來的那個 1 又該放到哪裏？

在 (b) 中令 $i = j - 1$：和式變成 $\sum_{i=0}^{m-1} \binom{2m-i}{i}$，這正是缺了最後一項 $i = m$ 的 B_{2m}。那最後一項是 $\binom{m}{m} = 1$，恰好就是多出來的 1。所以 (b) $= B_{2m}$，從而 $B_{2m+2} = B_{2m+1} + B_{2m}$。（當 $m = 0$ 時，和式都是空和，式子變成 $2 = 1 + 1$。）

奇數情況，$n = 2m+1$（$m \geq 0$）。我們需要證明 $B_{2m+3} = B_{2m+2} + B_{2m+1}$。此時

$$B_{2m+3} = \sum_{k=0}^{m+1} \binom{2m+3-k}{k}.$$

只有 $k = 0$ 項 $1 = \binom{2m+2}{0}$ 保持不動。對於 $1 \leq k \leq m+1$，以上方 $2m+2-k$、下方 k 套

用帕斯卡法則是容許的，因為 $k \le m+1$ 推出 $k \le 2m+2-k$。因此

$$\begin{aligned} B_{2m+3} &= \binom{2m+2}{0} + \sum_{k=1}^{m+1} \binom{2m+2-k}{k} + \sum_{k=1}^{m+1} \binom{2m+2-k}{k-1} \\ &= \sum_{j=0}^{m+1} \binom{2m+2-j}{j} + \sum_{i=0}^{m} \binom{2m+1-i}{i} \qquad (i = k-1) \\ &= B_{2m+2} + B_{2m+1}. \end{aligned}$$

這一次沒有剩下任何端項。

每個 $n \ge 0$ 都可寫成 $2m$ 或 $2m+1$ 的形式，所以對所有 $n = 0, 1, 2, \ldots$ 都有 $B_{n+2} - B_{n+1} = B_n$，此即所求。

與斐波那契數的關係

直接計算可得 $B_0 = \binom{0}{0} = 1$ 及 $B_1 = \binom{1}{0} = 1$。斐波那契數（Fibonacci numbers）由 $F_1 = 1$、$F_2 = 1$ 開始。所以 $B_0 = F_1$、$B_1 = F_2$，而兩個數列都服從同一條遞推關係（recurrence）：「每一項等於前兩項之和」。由數學歸納法（induction）（若 $B_n = F_{n+1}$ 且 $B_{n+1} = F_{n+2}$，則 $B_{n+2} = F_{n+2} + F_{n+1} = F_{n+3}$），

$$B_n = F_{n+1} \qquad \text{對所有} n \ge 0.$$

數列 B 就是把斐波那契數列移後一位：$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, \ldots$。

驗算

- 直接由定義計算幾項：$B_2 = 1+1 = 2$，$B_3 = 1+2 = 3$，$B_4 = 1+3+1 = 5$，$B_5 = 1+4+3 = 8$。這些就是 $F_3, \ldots, F_6$。
- 較大的一項：$B_9 = \binom{9}{0} + \binom{8}{1} + \binom{7}{2} + \binom{6}{3} + \binom{5}{4} = 1+8+21+20+5 = 55 = F_{10}$。
- 抽查帕斯卡法則：$\binom{5}{2} + \binom{5}{1} = 10+5 = 15 = \binom{6}{2}$。

常見錯誤

- 對 $\binom{m+1}{m+1}$ 這類端項套用帕斯卡法則，這樣會得出 $\binom{m}{m+1}$，超出了法則已獲證明的範圍 $1 \le r \le n$。應先把端項分離出來。
- 只處理一種奇偶性（parity）。B_{2m} 和 B_{2m+1} 的定義不同，而遞推關係把偶數下標的項與奇數下標的項聯繫起來，所以兩種情況都必須處理。
- 弄錯下標的位移：答案是 $B_n = F_{n+1}$，而不是 $B_n = F_n$（檢查一下 $B_0 = 1 \ne F_0$）。

STEP 之外

恆等式 $F_{n+1} = \sum_k \binom{n-k}{k}$ 有一個漂亮的計數證明：兩邊都在計算用正方形和骨牌（dominoes）鋪滿一條 $1 \times n$ 長條的方法數（k 是骨牌的數目，而在 $n-k$ 塊磚之中選出骨牌的位置，就得到 $\binom{n-k}{k}$）。以兩種方法計算同一個集合來證明恆等式（counting in two ways），是大學組合學（combinatorics）的核心技巧；生成函數（generating function）的觀點亦然，在這觀點下 $\sum F_n x^n = x/(1-x-x^2)$。如想深入了解，可以讀 Wilf 的 *generatingfunctionology*（《生成函數學》），或 Siklos 的 *Advanced Problems in Mathematics*（《高等數學問題》）。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。