詳細解答

STEP I 2013，第 5 題

純數學 • 圓錐曲線與旋轉

STEP I 2013，第 5 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

step.maths.org/questions/13-s1-q5

關鍵思路

唯一隨 k 改變的是 xy 項，而它決定了曲線的類型。若沒有 xy 項，便可以對 x 和 y 分別配方（completing the square）。若二次部分可以因式分解（factorise），整條方程有可能分解成兩條直線。而若二次部分是完全平方（perfect square）$(x+y)^2$，把坐標軸旋轉（rotate）$45°$ 就能把 $x+y$ 變成單一個坐標，剩下一條熟悉的拋物線（parabola）。

另外留意，設 $x=0$ 或 $y=0$ 都會令 xy 項消失，所以對任何 k，與坐標軸的截距（intercept）都相同：$x^2+3x=0$ 給出 $x=0$ 或 $x=-3$，而 $y^2+y=0$ 給出 $y=0$ 或 $y=-1$。每一條軌跡（locus）都經過 $(0,0)$、$(-3,0)$ 和 $(0,-1)$。

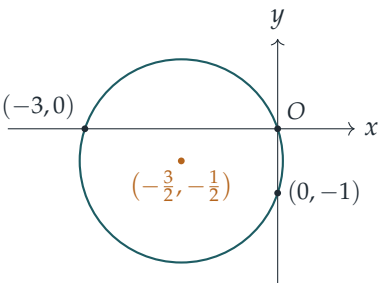
解答

第 (i) 部分

當 $k=0$ 時，對每個變量配方，得

$$(x+\tfrac{3}{2})^2+(y+\tfrac{1}{2})^2=\tfrac{9}{4}+\tfrac{1}{4}=\tfrac{5}{2}.$$

所以軌跡是圓心為 $(-\frac{3}{2},-\frac{1}{2})$、半徑為 $\sqrt{5/2}\approx 1.58$ 的圓。它與 x 軸相交於 $(0,0)$ 和 $(-3,0)$，與 y 軸相交於 $(0,0)$ 和 $(0,-1)$。（原點和 $(-3,0)$ 是一條弦（chord）的兩個端點，所以圓心位於該弦的垂直平分線（perpendicular bisector）$x=-\frac{3}{2}$ 上，理應如此。）



第 (ii) 部分

當 $k = \frac{10}{3}$ 時，兩邊乘以 3：

$$3x^2 + 3y^2 + 10xy + 9x + 3y = 0.$$

二次部分可因式分解為

$$3x^2 + 10xy + 3y^2 = (3x + y)(x + 3y),$$

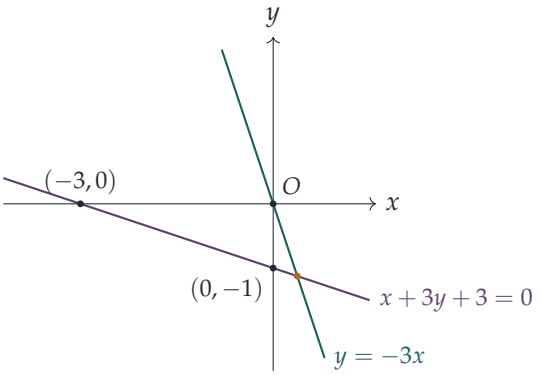
而一次部分是 $9x + 3y = 3(3x + y)$，同樣含有因式 $3x + y$。所以

$$(3x + y)(x + 3y) + 3(3x + y) = (3x + y)(x + 3y + 3) = 0.$$

乘積為零當且僅當其中一個因式為零，所以軌跡是一對直線

$$y = -3x \qquad \text{和} \qquad x + 3y + 3 = 0.$$

第一條直線經過原點（這是它與兩條坐標軸唯一的交點）。第二條直線與 x 軸相交於 $(-3, 0)$，與 y 軸相交於 $(0, -1)$。聯立兩條方程，得 $x - 9x + 3 = 0$，所以兩線相交於 $\left(\frac{3}{8}, -\frac{9}{8}\right)$。



第 (iii) 部分

當 $k = 2$ 時，方程為

$$(x+y)^2 + 3x + y = 0.$$

當 $\theta = 45°$ 時，$\cos\theta = \sin\theta = \frac{1}{\sqrt{2}}$，所以

$$X = \frac{x+y}{\sqrt{2}}, \qquad Y = \frac{y-x}{\sqrt{2}}.$$

因此 $x + y = \sqrt{2}\,X$ 及 $y - x = \sqrt{2}\,Y$，把兩式相加和相減，得

$$x = \frac{X-Y}{\sqrt{2}}, \qquad y = \frac{X+Y}{\sqrt{2}}.$$

? **想一想** 為甚麼我們需要以 X 和 Y 表示 x 和 y，而不是反過來？

我們知道 P 在曲線上，而要求的是 Q 所滿足的方程。所以必須把 x 和 y 代入 P 的軌跡方程，這就需要以 X 和 Y 來表示它們。（由於這個映射是旋轉，其逆映射（inverse）就只是反方向的旋轉，所以這一步很容易。）

一次部分變成

$$3x + y = \frac{3X - 3Y + X + Y}{\sqrt{2}} = \frac{4X - 2Y}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}\,X - \sqrt{2}\,Y,$$

而 $(x+y)^2 = 2X^2$。所以 Q 的軌跡是

$$2X^2 + 2\sqrt{2}\,X - \sqrt{2}\,Y = 0 \quad\Longleftrightarrow\quad \sqrt{2}\,Y = 2X^2 + 2\sqrt{2}\,X = \left(\sqrt{2}\,X + 1\right)^2 - 1,$$

正如所求。每一步都是可逆的，所以這正正就是 Q 的軌跡。

這是 (X, Y) 平面上的一條拋物線，開口朝 Y 增加的方向。它關於 $\sqrt{2}\,X + 1 = 0$ 即 $X = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ 這條直線對稱，頂點（vertex）位於 $X = -\frac{1}{\sqrt{2}}$，$Y = -\frac{1}{\sqrt{2}}$。

現在把旋轉還原。Q 是由 P 順時針旋轉 45° 得到的，所以 P 的軌跡就是把這條拋物線逆時針旋轉 45°。以 x 和 y 表示：

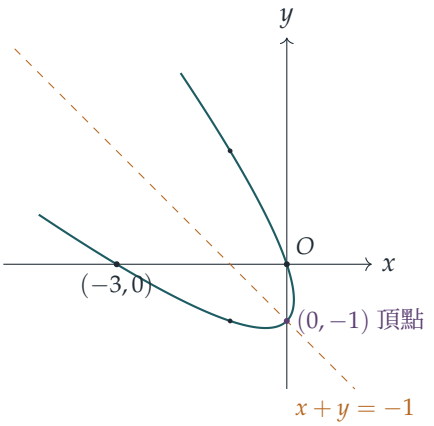
- 對稱軸（line of symmetry）$X = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ 即 $\frac{x+y}{\sqrt{2}} = -\frac{1}{\sqrt{2}}$，也就是

$$x + y = -1;$$

- 頂點位於 $x = \frac{X-Y}{\sqrt{2}} = 0$，$y = \frac{X+Y}{\sqrt{2}} = -1$，即 $(0, -1)$；
- 拋物線開口朝 $Y = \frac{y-x}{\sqrt{2}}$ 增加的方向，即 $(-1, 1)$ 的方向：向左上方。

截距是 $(0,0)$、$(-3,0)$ 和 $(0,-1)$，正如開首所述；其中 $(0,-1)$ 是頂點。該處的切線（tangent）垂直於對稱軸，所以斜率（gradient）為 1：曲線在頂點處穿過 y 軸，而不是與之相切。作為對稱性的驗證，關於 $x+y=-1$ 的反射（reflection）把 (a,b) 映到 $(-1-b,-1-a)$，所以原點映到 $(-1,-1)$，而 $(-3,0)$ 映到 $(-1,2)$；兩點都滿足 $(x+y)^2+3x+y=0$。

繪圖時，設 $u=x+y$ 會有幫助：這樣 $3x+y=-u^2$，解得 $x=-\frac{1}{2}(u^2+u)$，$y=\frac{1}{2}(u^2+3u)$。



P 的軌跡是一條頂點為 $(0,-1)$、對稱軸為 $x+y=-1$ 的拋物線。

驗算

- 把截距點 $(0,0)$、$(-3,0)$、$(0,-1)$ 代入全部三條方程：無論 k 為何值，結果都是 0。
- 在 (ii) 中，展開 $(3x+y)(x+3y+3)$ 再除以 3，便得回 $k=\frac{10}{3}$ 時的原方程。交點 $\left(\frac{3}{8},-\frac{9}{8}\right)$ 同時滿足 $3x+y=0$ 和 $x+3y+3=0$。
- 在 (iii) 中，取 $u=1$：點 $(-1,2)$ 在 P 的軌跡上。於是 $X=\frac{1}{\sqrt{2}}$，$Y=\frac{3}{\sqrt{2}}$，而 $\sqrt{2}\,Y=3=(1+1)^2-1$。

常見錯誤

- 在 (iii) 中，把 X,Y 的公式代入方程，而不是以 X,Y 表示 x,y。
- 把拋物線向錯誤方向旋轉回去，得出對稱軸為 $y-x=-1$，而非 $x+y=-1$。
- 在 (ii) 中，沒有發現一次項含有公因式 $3x+y$，因而把軌跡當作其他類型的圓錐曲線。

STEP 之外

每條方程 $ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$ 都是一條圓錐曲線（conic），其類型由二次部分的判別式（discriminant）$b^2 - 4ac$ 決定：負數時是橢圓（ellipse）（這裏 $k = 0$ 時是圓），零時是拋物線（$k = 2$），正數時是雙曲線（hyperbola），而雙曲線可以退化（degenerate）成一對直線（$k = \frac{10}{3}$）。在大學一年級的線性代數（linear algebra）課程中，你會學到如何有系統地消去 xy 項：把坐標軸旋轉到二次型（quadratic form）所對應的對稱矩陣（symmetric matrix）的特徵向量（eigenvectors）方向。斯特朗（Strang）的 *Introduction to Linear Algebra*（《線性代數導論》）對此有清晰的解釋。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。