詳細解答

STEP I 2013，第 4 題

純數學 • 代換積分法

> **STEP I 2013，第 4 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/13-s1-q4

關鍵思路

在第 (i) 部分，每個被積函數（integrand）都是「某個式子的函數，乘以該式子的導數（derivative）」：$\sec^2 x$ 是 $\tan x$ 的導數，而 $\sec x \tan x$ 是 $\sec x$ 的導數。在第 (ii) 部分，多出來的因子 x 或 x^2 提示我們要用分部積分法（integration by parts）。我們要積分的是三角函數那個因子，而第 (i) 部分剛好示範了該怎樣積。

解答

第 (i) 部分

對第一個積分，作代換（substitution）$u = \tan x$，於是 $\mathrm{d}u = \sec^2 x \,\mathrm{d}x$。當 $x = 0$ 時 $u = 0$，當 $x = \frac{1}{4}\pi$ 時 $u = 1$。因此

$$\int_0^{\frac{1}{4}\pi} \tan^n x \sec^2 x \,\mathrm{d}x = \int_0^1 u^n \,\mathrm{d}u = \left[\frac{u^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 = \frac{1}{n+1},$$

這裏用了 $n > 0$，所以 $0^{n+1} = 0$。

想一想 在第二個積分中，$\sec^n x \tan x$ 裏面藏着哪個函數的導數？

由於 $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \sec x = \sec x \tan x$，我們先分出一個 $\sec x$ 因子：

$$\sec^n x \tan x = \sec^{n-1} x \,(\sec x \tan x).$$

現在代換 $u = \sec x$，於是 $\mathrm{d}u = \sec x \tan x \,\mathrm{d}x$，而 $x = 0$ 時 $u = 1$，$x = \frac{1}{4}\pi$ 時 $u = \sqrt{2}$。

由於 $n > 0$，我們可以除以 n，得

$$\int_0^{\frac{1}{4}\pi} \sec^n x \tan x \,\mathrm{d}x = \int_1^{\sqrt{2}} u^{n-1} \,\mathrm{d}u = \left[\frac{u^n}{n}\right]_1^{\sqrt{2}} = \frac{(\sqrt{2})^n - 1}{n},$$

即所求。

第 (ii) 部分

第一個積分。記之為 I_1。我們用分部積分法，對 x 求導，並對 $\sec^4 x \tan x$ 積分。用第 (i) 部分的代換 $u = \sec x$，可得原函數（antiderivative）

$$\int \sec^4 x \tan x \,\mathrm{d}x = \tfrac{1}{4} \sec^4 x + C.$$

（它在 $[0, \frac{1}{4}\pi]$ 上的定積分（definite integral）是 $\frac{1}{4}(4-1) = \frac{3}{4}$，即第 (i) 部分中 $n = 4$ 的情況。）所以

$$I_1 = \left[\tfrac{1}{4} x \sec^4 x\right]_0^{\frac{1}{4}\pi} - \frac{1}{4}\int_0^{\frac{1}{4}\pi} \sec^4 x \,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{4}\cdot\frac{4}{4} - \frac{1}{4}\int_0^{\frac{1}{4}\pi} \sec^4 x \,\mathrm{d}x,$$

因為 $\sec^4 \frac{1}{4}\pi = (\sqrt{2})^4 = 4$。對餘下的積分，寫 $\sec^2 x = 1 + \tan^2 x$：

$$\int_0^{\frac{1}{4}\pi} \sec^4 x \,\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{1}{4}\pi} \sec^2 x \,\mathrm{d}x + \int_0^{\frac{1}{4}\pi} \tan^2 x \sec^2 x \,\mathrm{d}x = 1 + \frac{1}{3} = \frac{4}{3},$$

其中第一個積分是 $[\tan x]_0^{\frac{1}{4}\pi} = 1$，第二個是第 (i) 部分中 $n = 2$ 的情況。因此

$$\int_0^{\frac{1}{4}\pi} x \sec^4 x \tan x \,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{3}.$$

第二個積分。記之為 I_2。同樣地，我們對 x 的冪求導，並對 $\sec^2 x \tan x$ 積分。其中一個原函數是 $\frac{1}{2}\sec^2 x$，但 $\frac{1}{2}\tan^2 x$ 同樣可用（兩者相差常數 $\frac{1}{2}$），而且是更好的選擇。

> ? **想一想** 為甚麼 $\frac{1}{2}\tan^2 x$ 比 $\frac{1}{2}\sec^2 x$ 更好？

分部積分之後，我們會剩下 $x\tan^2 x$，而 $\tan^2 x = \sec^2 x - 1$ 可以拆成我們會積分的幾部分。此外，$\tan^2 x$ 在 0 處為零，令邊界項保持簡潔。（用 $\frac{1}{2}\sec^2 x$ 最終也會得到相同答案。）

所以，由 $\tan \frac{1}{4}\pi = 1$，

$$I_2 = \left[\tfrac{1}{2} x^2 \tan^2 x\right]_0^{\frac{1}{4}\pi} - \int_0^{\frac{1}{4}\pi} x \tan^2 x \,\mathrm{d}x = \frac{\pi^2}{32} - \int_0^{\frac{1}{4}\pi} x \tan^2 x \,\mathrm{d}x.$$

現在

$$\int_0^{\frac{1}{4}\pi} x \tan^2 x \,\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{1}{4}\pi} x \sec^2 x \,\mathrm{d}x - \int_0^{\frac{1}{4}\pi} x \,\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{1}{4}\pi} x \sec^2 x \,\mathrm{d}x - \frac{\pi^2}{32}.$$

再用一次分部積分法，以 $\tan x$ 作為 $\sec^2 x$ 的原函數，並利用 $\int \tan x \,\mathrm{d}x = \ln \sec x$（由於在此區間上 $\sec x > 0$，此式成立）：

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{1}{4}\pi} x \sec^2 x \,\mathrm{d}x &= \Big[x \tan x\Big]_0^{\frac{1}{4}\pi} - \int_0^{\frac{1}{4}\pi} \tan x \,\mathrm{d}x \\ &= \frac{\pi}{4} - \Big[\ln \sec x\Big]_0^{\frac{1}{4}\pi} = \frac{\pi}{4} - \ln\sqrt{2} = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\ln 2.\end{aligned}$$

把各部分合起來，

$$I_2 = \frac{\pi^2}{32} - \left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\ln 2 - \frac{\pi^2}{32}\right),$$

即

$$\int_0^{\frac{1}{4}\pi} x^2 \sec^2 x \tan x \,\mathrm{d}x = \frac{\pi^2}{16} - \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\ln 2.$$

驗算

- 第 (i) 部分取 $n = 1$：兩條公式分別給出 $\int_0^{\frac{1}{4}\pi} \tan x \sec^2 x \,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}$ 和 $\int_0^{\frac{1}{4}\pi} \sec x \tan x \,\mathrm{d}x = \sqrt{2} - 1$，可以直接由 $\left[\frac{1}{2}\tan^2 x\right]$ 和 $[\sec x]$ 驗證。
- 正負與大小：第 (ii) 部分的兩個被積函數在 $(0, \frac{1}{4}\pi)$ 上都是正數，答案 $\frac{\pi}{4} - \frac{1}{3} \approx 0.4521$ 和 $\frac{\pi^2}{16} - \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\ln 2 \approx 0.1780$ 亦然。第二個較小，理應如此，因為在該區間上 $x^2 \sec^2 x \le x \sec^4 x$（因為 $x < 1 < \sec^2 x$）。
- 粗略上界：$x \sec^4 x \tan x \le \frac{\pi}{4} \sec^4 x \tan x$，所以 $I_1 \le \frac{\pi}{4} \cdot \frac{3}{4} \approx 0.589$。我們得到的 0.452 與此相符。用計算機以辛普森法則（Simpson's rule）分幾個小區間計算，結果與兩個值都很接近。

常見錯誤

- 在第 (i) 部分的第二個積分中，未先分出 $\sec x \tan x$ 就代換 $u = \sec x$，結果冪次留在 n 而非 $n - 1$。
- 忘記 $\sec \frac{1}{4}\pi = \sqrt{2}$，因此 $\sec^4 \frac{1}{4}\pi = 4$ 而 $\sec^2 \frac{1}{4}\pi = 2$。
- 漏掉邊界項（boundary term）$\left[\frac{1}{2}x^2 \tan^2 x\right]$，或把 $\int \tan x \,\mathrm{d}x$ 的正負號弄錯（它是 $\ln \sec x = -\ln \cos x$）。

STEP 之外

第 (i) 部分的積分是積分 $\sec^m x \tan^n x$ 這套標準理論的起步，其中遞推公式（reduction formulae）讓你逐步降低冪次。像第 (ii) 部分那樣帶多項式因子的分部積分，可推廣為

「表格法」（tabular method），而在更後的階段，更發展成把導數從一個函數轉移到另一個函數的想法，這正是微分方程弱解（weak solutions）的基礎。若想仔細了解代換法和分部積分法為何成立，可參閱 Abbott 的 *Understanding Analysis*（《理解分析》）；若想做更多同類型的題目，可試試 Siklos 的 *Advanced Problems in Mathematics*（《數學進階難題》）。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。