詳細解答

STEP I 2013，第 3 題

純數學 • 向量代數

> **STEP I 2013，第 3 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/13-s1-q3

關鍵思路

這裏的一切都是線性（linear）的，所以每次最乾淨利落的做法，都是把每一點寫成 $\mathbf{x}$、$\mathbf{y}$ 和 $\mathbf{z}$ 的組合，然後相減。兩點相異，當且僅當它們的位置向量（position vector）之差不為零；而這個差總會化成一個簡單的因子乘以像 $\mathbf{x}-\mathbf{y}$ 這樣的向量。從幾何上看，$X*Y$ 是直線 XY 上的一點，而當 $0<\lambda<1$ 時，它位於兩點之間的線段（segment）上。

解答

在整個解答中，兩點相同當且僅當它們的位置向量相等。

第 (i) 部分

按定義，$Y*X$ 的位置向量是 $\lambda\mathbf{y}+(1-\lambda)\mathbf{x}$，所以

$$\begin{aligned}(\lambda\mathbf{x}+(1-\lambda)\mathbf{y})-(\lambda\mathbf{y}+(1-\lambda)\mathbf{x}) &= (2\lambda-1)\mathbf{x}-(2\lambda-1)\mathbf{y}\\ &= (2\lambda-1)(\mathbf{x}-\mathbf{y}).\end{aligned}$$

由於 X 與 Y 相異，$\mathbf{x}-\mathbf{y}\neq\mathbf{0}$，因此這個差為零當且僅當 $2\lambda-1=0$。故此，除非 $\lambda=\frac{1}{2}$（此時兩者都是 XY 的中點），否則 $X*Y$ 與 $Y*X$ 相異。

第 (ii) 部分

把兩邊分別展開：

$$\begin{aligned}(X*Y)*Z:&\quad \lambda(\lambda\mathbf{x}+(1-\lambda)\mathbf{y})+(1-\lambda)\mathbf{z}=\lambda^2\mathbf{x}+\lambda(1-\lambda)\mathbf{y}+(1-\lambda)\mathbf{z},\\ X*(Y*Z):&\quad \lambda\mathbf{x}+(1-\lambda)(\lambda\mathbf{y}+(1-\lambda)\mathbf{z})=\lambda\mathbf{x}+\lambda(1-\lambda)\mathbf{y}+(1-\lambda)^2\mathbf{z}.\end{aligned}$$

兩者的 $\mathbf{y}$ 項相同，相減得

$$\begin{aligned}\text{差} &= (\lambda^2-\lambda)\mathbf{x} + ((1-\lambda)-(1-\lambda)^2)\mathbf{z}\\ &= -\lambda(1-\lambda)\mathbf{x} + \lambda(1-\lambda)\mathbf{z}\\ &= \lambda(1-\lambda)(\mathbf{z}-\mathbf{x}).\end{aligned}$$

這個差不為零，當且僅當每個因子都不為零。所以 $(X*Y)*Z$ 與 $X*(Y*Z)$ 相異，當且僅當

$$\lambda \neq 0, \qquad \lambda \neq 1 \qquad \text{且} \qquad Z \neq X.$$

留意 Y 完全不起作用。被排除的值也合情合理：當 $\lambda = 1$ 時，這個運算總是給出第一點；當 $\lambda = 0$ 時，總是給出第二點，所以兩種加括號方式分別都給出 X 或 Z。

第 (iii) 部分

為求簡潔，記 $\mu = 1-\lambda$。右方為

$$\begin{aligned}(X*Z)*(Y*Z): \quad \lambda(\lambda\mathbf{x}+\mu\mathbf{z}) + \mu(\lambda\mathbf{y}+\mu\mathbf{z})\\ = \lambda^2\mathbf{x} + \lambda\mu\,\mathbf{y} + \mu(\lambda+\mu)\mathbf{z}\\ = \lambda^2\mathbf{x} + \lambda\mu\,\mathbf{y} + \mu\,\mathbf{z},\end{aligned}$$

因為 $\lambda+\mu = 1$。這正是第 (ii) 部分中 $(X*Y)*Z$ 的展開式，所以對所有點 X、Y、Z，

$$(X*Y)*Z = (X*Z)*(Y*Z)$$

得證。

> **?** **想一想** $X*(Y*Z)$ 的「對應結果」應該是怎樣的？

在第 (iii) 部分中，外層的 $*Z$ 分配到左邊的括號上。其鏡像就是把 $X*$ 分配到右邊的括號上，這提示我們試試 $(X*Y)*(X*Z)$。果然，

$$\begin{aligned}(X*Y)*(X*Z): \quad \lambda(\lambda\mathbf{x}+\mu\mathbf{y}) + \mu(\lambda\mathbf{x}+\mu\mathbf{z})\\ = \lambda(\lambda+\mu)\mathbf{x} + \lambda\mu\,\mathbf{y} + \mu^2\mathbf{z}\\ = \lambda\mathbf{x} + \lambda\mu\,\mathbf{y} + \mu^2\mathbf{z},\end{aligned}$$

這正是第 (ii) 部分中 $X*(Y*Z)$ 的展開式。所以對任意點 X、Y、Z，

$$X*(Y*Z) = (X*Y)*(X*Z).$$

第 (iv) 部分

我們斷言 P_n 的位置向量為

$$\mathbf{p}_n = \lambda^n\mathbf{x} + (1-\lambda^n)\mathbf{y}.$$

當 $n = 1$ 時，這就是 $X * Y$ 的定義。若它對 $n - 1$ 成立，則

$$\begin{aligned}\mathbf{p}_n = \lambda\mathbf{p}_{n-1} + (1-\lambda)\mathbf{y} &= \lambda^n\mathbf{x} + (\lambda - \lambda^n + 1 - \lambda)\mathbf{y} \\ &= \lambda^n\mathbf{x} + (1-\lambda^n)\mathbf{y},\end{aligned}$$

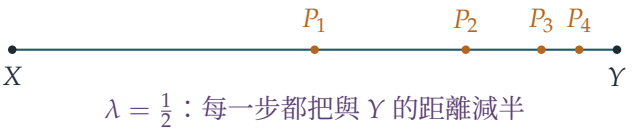
所以由歸納法（induction），此公式對所有 $n \geq 1$ 成立。

現在沿線段量度：

$$\mathbf{p}_n - \mathbf{x} = (1-\lambda^n)(\mathbf{y}-\mathbf{x}), \qquad \mathbf{y} - \mathbf{p}_n = \lambda^n(\mathbf{y}-\mathbf{x}).$$

兩者都是同一個非零向量 $\mathbf{y} - \mathbf{x}$ 的正倍數，因為 $0 < \lambda < 1$ 給出 $0 < \lambda^n < 1$。所以 P_n 嚴格位於 X 與 Y 之間，而且

$$XP_n : P_nY = (1-\lambda^n) : \lambda^n.$$



每一步都把餘下與 Y 的距離乘以 λ，所以這些點一步步向 Y 推進，並且當 $n \to \infty$ 時 $P_n \to Y$。

驗算

- 在第 (i) 部分，沿一條直線取 $\mathbf{x} = \mathbf{0}$、$\mathbf{y} = \mathbf{1}$ 及 $\lambda = \frac{1}{3}$：$X * Y$ 位於 $\frac{2}{3}$，$Y * X$ 位於 $\frac{1}{3}$，兩者相差 $\frac{1}{3} = |2\lambda - 1|$。
- 在第 (ii) 部分，當 $Z = X$ 時，無論 λ 取何值，兩種加括號方式都應相同；此時我們的差 $\lambda(1-\lambda)(\mathbf{z} - \mathbf{x})$ 確實為零，正如所料。
- 在第 (iv) 部分，取 $\lambda = \frac{1}{2}$ 及 $n = 3$，比為 $\frac{7}{8} : \frac{1}{8} = 7 : 1$，而 P_3 確實位於由 X 到 Y 的 $\frac{7}{8}$ 處（距離減半三次）。取 $n = 1$ 時，比 $(1-\lambda) : \lambda$ 正是 $X * Y$ 的定義。

常見錯誤

- 在第 (ii) 部分忘記 $Z \neq X$：答案不只是關於 λ 的條件。
- 在第 (iv) 部分把比的次序弄反。由於 $\mathbf{p}_n$ 在 $\mathbf{x}$ 上的權重是 λ^n，當 λ^n 較大時它靠近 X，所以較短的一段 XP_n 對應的是 $1 - \lambda^n$。

STEP 之外

點 $\lambda\mathbf{x} + (1-\lambda)\mathbf{y}$ 是一個凸組合（convex combination，或稱仿射組合（affine combination）），它是凸集（convex set）、重心坐標（barycentric coordinates）以及電腦圖像中線性插值（linear interpolation）的基本構件。第 (ii) 部分說明 $*$ 不滿足結合律（associative），而第 (iii) 部分則說明它滿足自分配律（self-distributive）；具有這種性質的運算在代數中以架（rack）、環結（quandle）和中介代數（medial algebra）等名稱來研究。若想從線性代數的角度理解，可參閱 Strang 的 *Introduction to Linear Algebra*（《線性代數導論》）。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。