詳細解答

STEP I 2013，第 2 題

純數學 • 下取整函數方程

> **STEP I 2013，第 2 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/13-s1-q2

關鍵思路

函數 $\lfloor x \rfloor$ 在每個區間（interval）$[k, k+1)$ 上都是常數，所以在該區間上 $f(x) = k/x$ 只是一段直角雙曲線（rectangular hyperbola）。整個圖像就是由這些曲線段串連而成，每個整數 k 對應一段。於是解 $f(x) = c$ 便歸結為：哪些曲線段能達到高度 c？在對應 k 的那一段上，唯一的候選是 $x = k/c$，而它恰好在落入 $[k, k+1)$ 時才算數。

解答

第 (i) 部分

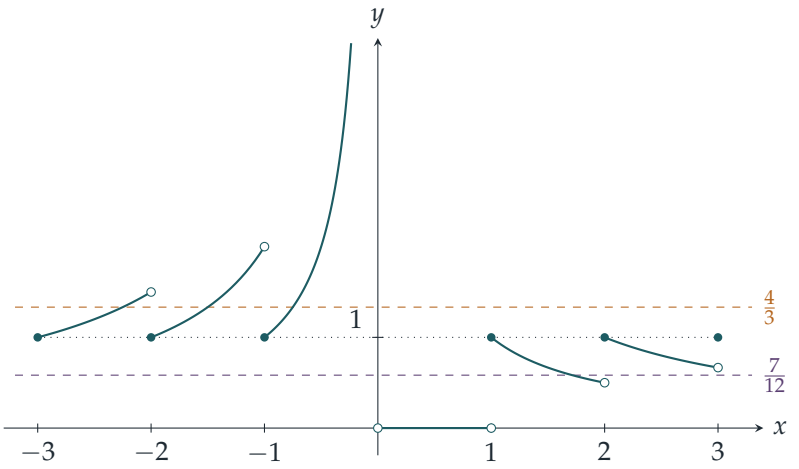
固定一個整數 k，考慮 $k \le x < k+1$（且 $x \neq 0$），此時 $f(x) = k/x$。

- $k = 0$，即 $0 < x < 1$：此時 $f(x) = 0$。
- $k \ge 1$：$f(x) = k/x$ 由 $f(k) = 1$ 遞減（decreasing），趨向 $k/(k+1)$，但永遠達不到。所以這一段的取值恰好是 $\left(\frac{k}{k+1}, 1\right]$。
- $k \le -1$：設 $k = -m$，其中 $m \ge 1$。此時 x 和 k 都是負數，所以 $f(x) = m/|x| > 0$。當 x 由 $-m$ 增加至趨向 $-m+1$ 時，$|x|$ 遞減，所以 f 由 $f(-m) = 1$ 起遞增。當 $m \ge 2$ 時，它趨向 $\frac{m}{m-1}$，但永遠達不到，所以這一段的取值恰好是 $\left[1, \frac{m}{m-1}\right)$。當 $m = 1$ 時，當 $x \to 0^-$ 時 $f(x) = -1/x \to +\infty$，所以這一段的取值是 $[1, \infty)$。

在 $-3 \le x \le 3$ 範圍內，各段如下：

x	$[-3,-2)$	$[-2,-1)$	$[-1,0)$	$(0,1)$	$[1,2)$	$[2,3)$
$f(x)$	$-3/x$	$-2/x$	$-1/x$	0	$1/x$	$2/x$
取值	$[1, \frac{3}{2})$	$[1,2)$	$[1,\infty)$	0	$(\frac{1}{2}, 1]$	$(\frac{2}{3}, 1]$

最後還有 $f(3)=1$。每一段都在其左端（整數端）從高度 1 開始，該點包含在內，而右端則是開端。



第 (ii) 部分

在 $\lfloor x\rfloor = k$ 的那一段上，方程 $f(x)=c$（其中 $c\neq 0$）即 $k/x=c$，所以 $x=k/c$。它恰好在 $k\le k/c<k+1$ 時才是真正的根（root）。因此對每個 c，我們只需利用第 (i) 部分得出的取值範圍，判斷哪些曲線段能達到高度 c。

$f(x)=\frac{7}{12}$。 由於 $0<\frac{7}{12}<1$，只有 $k\ge 1$ 的曲線段可能有根，而且需要 $\frac{k}{k+1}<\frac{7}{12}$，即 $12k<7k+7$，即 $k<\frac{7}{5}$。所以只有 $k=1$ 可行，得 $x=1\big/\frac{7}{12}$：

$$x=\tfrac{12}{7}.$$

從圖像上看，直線 $y=\frac{7}{12}$ 只與 $[1,2)$ 上的那一段相交，因為 $[2,3)$ 上的那一段一直高於 $\frac{2}{3}$。

$f(x)=\frac{17}{24}$。 現在需要 $\frac{k}{k+1}<\frac{17}{24}$，即 $24k<17k+17$，即 $k<\frac{17}{7}$，所以 $k=1$ 或 $k=2$。根為 $x=k\big/\frac{17}{24}$：

$$x=\tfrac{24}{17} \quad 及 \quad x=\tfrac{48}{17}.$$

（確實 $2\le\frac{48}{17}\approx 2.82<3$。）

$f(x)=\frac{4}{3}$。 由於 $\frac{4}{3}>1$，只有負數那邊的曲線段可能有根。當 $\frac{4}{3}<\frac{m}{m-1}$（或 $m=1$）時，$k=-m$ 的那一段能達到 $\frac{4}{3}$，即 $4m-4<3m$，即 $m<4$。所以 $m=1,2,3$，根為 $x=-m\big/\frac{4}{3}=-\frac{3m}{4}$：

$$x=-\tfrac{3}{4},\quad x=-\tfrac{3}{2},\quad x=-\tfrac{9}{4}.$$

$m = 4$ 的情況剛好不行：$[-4, -3)$ 上的那一段只取小於 $\frac{4}{3}$ 的值。

第 (iii) 部分

這裏 $0 < \frac{9}{10} < 1$，所以根來自 $k \geq 1$ 且 $\frac{k}{k+1} < \frac{9}{10}$ 的曲線段，即 $10k < 9k + 9$，即 $k < 9$。所以 $k = 1, 2, \ldots, 8$ 各給出一個根 $x = \frac{10k}{9}$。最大的根對應 $k = 8$：

$$x = \frac{80}{9} \approx 8.89,$$

它確實落在 $[8, 9)$ 內。

最後部分

首先找出沒有根或有無限多個根的 c 值。

- $c < 0$：沒有根，因為當 $x > 0$ 時 $f(x) \geq 0$，而當 $x < 0$ 時 $f(x) > 0$。
- $c = 0$：每個 $x \in (0, 1)$ 都是根，所以有無限多個根。
- $c = 1$：每個非零整數都是根，所以同樣有無限多個根。

> **想一想** 對於一般的 c，不畫圖的話，怎樣數根的個數？

利用第 (i) 部分得出的取值範圍：每一段最多貢獻一個根，所以只需數一數有多少段的取值範圍包含 c。

情況 $0 < c < 1$。 能達到 c 的曲線段是 $k \geq 1$ 且 $\frac{k}{k+1} < c$ 的那些。由於 $\frac{k}{k+1}$ 隨 k 遞增，這些段就是 $k = 1, 2, \ldots$，直至最後一個滿足 $\frac{k}{k+1} < c$ 的 k。所以恰好有 n 個根，當且僅當第 n 段能達到 c 而第 $(n+1)$ 段不能：

$$\frac{n}{n+1} < c \leq \frac{n+1}{n+2}.$$

（當 $0 < c \leq \frac{1}{2}$ 時，沒有任何一段能達到 c，因此沒有根。）

情況 $c > 1$。 能達到 c 的曲線段是 $k = -m$ 的那些，其中 $m = 1$ 或 $\frac{m}{m-1} > c$。由於 $\frac{m}{m-1} = 1 + \frac{1}{m-1}$ 隨 m 增加而遞減，這些段就是 $m = 1, 2, \ldots$，直至最後一個滿足 $\frac{m}{m-1} > c$ 的 m。所以恰好有 n 個根，當且僅當 $m = n$ 的那一段能達到 c 而 $m = n + 1$ 的那一段不能：

$$\frac{n+1}{n} \leq c < \frac{n}{n-1} \qquad (n \geq 2),$$

而當 $n = 1$ 時，條件就是 $c \geq 2$（$[-1, 0)$ 上的那一段必定能達到 c，而當 $c \geq 2$ 時，$[-2, -1)$ 上的那一段不能）。

答案。 對 $n \geq 1$，方程 $f(x) = c$ 恰好有 n 個根，當且僅當

$$\frac{n}{n+1} < c \leq \frac{n+1}{n+2} \qquad \text{或} \qquad \frac{n+1}{n} \leq c < \frac{n}{n-1},$$

其中當 $n = 1$ 時，第二個條件理解為 $c \geq 2$。留意等號放在哪裏。兩個等號都源自曲線段的開端：$c = \frac{n+1}{n+2}$ 不能由 $[n+1, n+2)$ 上的那一段達到，而 $c = \frac{n+1}{n}$ 不能由 $[-(n+1), -n)$ 上的那一段達到。所以這兩個邊界值仍然恰好給出 n 個根。

驗算

- 代回原式：$\lfloor \frac{12}{7} \rfloor = 1$ 且 $1/\frac{12}{7} = \frac{7}{12}$；$\lfloor \frac{48}{17} \rfloor = 2$ 且 $2/\frac{48}{17} = \frac{17}{24}$；$\lfloor -\frac{9}{4} \rfloor = -3$ 且 $-3/(-\frac{9}{4}) = \frac{4}{3}$；$\lfloor \frac{80}{9} \rfloor = 8$ 且 $8/\frac{80}{9} = \frac{9}{10}$。
- 一般答案與個別情況吻合：$\frac{2}{3} < \frac{17}{24} \leq \frac{3}{4}$ 給出 $n = 2$；$\frac{4}{3} \leq \frac{4}{3} < \frac{3}{2}$ 給出 $n = 3$；$\frac{8}{9} < \frac{9}{10} \leq \frac{9}{10}$ 給出 $n = 8$。後兩個剛好落在範圍的端點上，正好檢驗 $\leq$ 和 $<$ 的位置是否正確。
- 一個邊界值：$c = 2$ 應該給出一個根。確實 $x = -\frac{1}{2}$ 可行，而 $x = -1$（來自 $k = -2$）有 $\lfloor -1 \rfloor = -1 \neq -2$。
- 試試 $c = \frac{1}{2}$：條件不給出任何 n；而確實對 $k \neq 0$，$x = k/c = 2k$ 永遠不滿足 $\lfloor 2k \rfloor = k$。

常見錯誤

- 忘記對負數 x 而言，$\lfloor x \rfloor$ 是向下取整，所以 $\lfloor -2.25 \rfloor = -3$，而不是 -2。這樣會完全漏掉 $c > 1$ 時的負數分支。
- 端點搞錯：每一段包含其左端（整數端，高度為 1），但不包含右端。這決定了最終條件中出現的是 $\leq$ 還是 $<$。
- 漏掉 $c = 0$ 和 $c = 1$（有無限多個根），或漏掉 $c < 0$ 和 $0 < c \leq \frac{1}{2}$（沒有根）。

STEP 之外

像 $\lfloor x \rfloor / x$ 這樣的函數，是「分段連續（continuous）但在孤立點上跳躍」的函數中最簡單的例子。小心分辨哪些端點能夠取到，正是大學第一個數學分析（analysis）課程處理上確界（supremum）和下確界（infimum）時所需的習慣。在這裏，f 在 $x > 0$ 上的 $\sup f$ 是 1，而且能取到；而在 $x \geq 1$ 上的下確界是 $\frac{1}{2}$，卻取不到。同一個函數還說明了當 $x \to \infty$ 時 $\lfloor x \rfloor / x \to 1$，讓你初嘗解析數論（analytic number theory）中所用的估計方

法。若想進一步了解上確界、極限（limit）和連續性，Abbott 的 *Understanding Analysis*（《理解分析》）是很好的讀物。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。