詳細解答

STEP I 2013，第 12 題

概率與統計 • 不放回抽樣

STEP I 2013，第 12 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

step.maths.org/questions/13-s1-q12

關鍵思路

「隨機」選取 k 粒藥片，意思是容器中剩下的藥片裏，每一組 k 粒藥片被選中的機會均等，所以每天的概率（probability）都是兩個計數之比：有利的選法數目除以 $\binom{\text{剩下的藥片}}{k}$。至於最後一天的問題，竅門在於對稱性（symmetry）：留到最後一天的藥片，與第一天選出的藥片同樣隨機。在 (iii) 中，各天之間環環相扣，十分順暢，因為在「好」的一天之後，容器的狀態恰好就像一個較短的假期。

解答

在整個解答中，把藥片視為可區分的（例如編上號碼），儘管它們看起來一模一樣。這樣做不會改變任何概率，而且令從 N 粒中選 k 粒的全部 $\binom{N}{k}$ 種選法機會均等。

第 (i) 部分

當 $k = 3$ 及 $n = 3$ 時，共有 9 粒藥片，每種 3 粒。從中選 3 粒的方法數為 $\binom{9}{3} = 84$。要每種各得一粒，就要從 3 粒第 1 種藥片中選一粒、從 3 粒第 2 種中選一粒、從 3 粒第 3 種中選一粒，所以共有 $3^3 = 27$ 種方法。因此

$$\mathrm{P}(\text{第 1 天每種各一粒}) = \frac{27}{84} = \frac{9}{28},$$

正如所求。

? **想一想** 為甚麼求最後一天的概率時，我不需要逐一分析第 1 天和第 2 天發生了甚麼？

在整個假期中，九粒藥片被隨機分成三組，每組三粒：第 1 天的一組、第 2 天的一組和

第 3 天的一組（即剩下的）。無論按 1、2、3 的次序還是按 3、2、1 的次序選出各組，所得的分佈（distribution）都相同：把藥片分成三個有標記的組，每一種分法的機會都均等。特別地，留給第 3 天的那組藥片是一組均勻隨機（uniformly random）的三粒藥片，與第 1 天選出的那組完全一樣。所以最後一天剩下每種各一粒藥片的概率同樣是

$$\frac{9}{28}.$$

第 (ii) 部分

現在共有 $3n$ 粒藥片，每種 n 粒。共有 $\binom{3n}{3}$ 種機會均等的選法，其中 n^3 種包含每種各一粒。所以

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(\text{第 1 天每種各一粒}) &= \frac{n^3}{\binom{3n}{3}} = \frac{6n^3}{3n(3n-1)(3n-2)} \\ &= \frac{2n^2}{(3n-1)(3n-2)}.\end{aligned}$$

當 $n = 3$ 時，此值為 $\frac{18}{8\cdot 7} = \frac{9}{28}$，與 (i) 吻合。

第 (iii) 部分

現在 $k = 2$，共有 $2n$ 粒藥片，兩種藥片各 n 粒。對 $m = n, n-1, \ldots, 1$，設 G_m 為以下事件：在某天開始時容器中每種藥片各有 m 粒，而我在當天選到每種各一粒（所以第 1 天時 $m = n$）。

若容器中每種各有 m 粒，則選兩粒藥片共有 $\binom{2m}{2} = m(2m-1)$ 種選法，其中 $m \cdot m$ 種是每種各一粒。所以

$$\mathrm{P}(\text{每種各一粒} \mid m \text{ 為每種剩餘粒數}) = \frac{m^2}{m(2m-1)} = \frac{m}{2m-1}.$$

若到目前為止每一天都是「好」的，那麼每天都恰好取走了每種各一粒，所以下一天開始時每種各有 $m-1$ 粒。把每天的條件概率（conditional probability）逐一相乘，

$$\mathrm{P}(\text{每天都是每種各一粒}) = \prod_{m=1}^{n} \frac{m}{2m-1} = \frac{n!}{1 \times 3 \times 5 \times \cdots \times (2n-1)}.$$

為了整理奇數之積，把分子和分母同乘以偶數之積 $2 \times 4 \times \cdots \times (2n) = 2^n\, n!$：

$$1 \times 3 \times \cdots \times (2n-1) = \frac{(2n)!}{2^n\, n!}.$$

因此

$$\boxed{\mathrm{P}(\text{每天都是每種各一粒}) = \frac{2^n\,(n!)^2}{(2n)!}}$$

（驗算一下：$n=1$ 時得 1，這是正確的：每種只有一粒時，我必定兩粒都取。）

現在對 $n!$ 及 $(2n)!$ 使用斯特林（Stirling）近似（Stirling's approximation）：

$$(n!)^2 \approx 2n\pi\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^{2n},$$
$$(2n)! \approx \sqrt{4n\pi}\left(\frac{2n}{\mathrm{e}}\right)^{2n} = 2\sqrt{n\pi}\,2^{2n}\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^{2n}.$$

因子 $(n/\mathrm{e})^{2n}$ 互相抵消，剩下

$$\frac{2^n\,(n!)^2}{(2n)!} \approx \frac{2^n\cdot 2n\pi}{2\sqrt{n\pi}\,2^{2n}} = 2^{-n}\,\frac{n\pi}{\sqrt{n\pi}} = 2^{-n}\sqrt{n\pi},$$

這正是所求的近似式。

驗算

- 用電腦窮舉所有抽取藥片的方式，證實了 (i) 中第 1 天和第 3 天的概率都是 $\frac{9}{28}$，(ii) 的公式在 $n \le 7$ 時成立，以及 (iii) 的公式在 $n \le 4$ 時成立。
- 當 $n=10$ 時，(iii) 的準確概率為 $\frac{2^{10}(10!)^2}{20!} \approx 0.005542$，而 $2^{-10}\sqrt{10\pi} \approx 0.005474$：偏低約 1.3%。隨着 n 增大，兩者之比趨向 1（$n=50$ 時約為 1.0025），這與斯特林近似的預期一致。
- (iii) 的另一種計數方法：把 $2n$ 粒藥片分成 n 對並排成有序列，共有 $(2n)!/2^n$ 種機會均等的分法；好的分法是每天把第 1 種藥片與第 2 種藥片配對，共有 $n!\times n!$ 種。兩者之比同樣是 $2^n(n!)^2/(2n)!$。

常見錯誤

- 每次抽一粒藥片，寫出 $\frac{3}{9}\times\frac{3}{8}\times\frac{3}{7}$，但這是按此次序抽到第 1、2、3 種的機會。三種藥片出現的次序共有 3! 種，所以應得 $6\times\frac{27}{504}=\frac{9}{28}$。（又或者：第一粒可以是任何一種，所以是 $1\times\frac{6}{8}\times\frac{3}{7}=\frac{9}{28}$。）
- 求最後一天的概率時，嘗試對第 1 天發生的所有情況作條件分析；這方法可行，但十分冗長，而對稱性能立即給出答案。
- 對 $(2n)!$ 用斯特林近似時，要把所有 n 都換成 $2n$，包括平方根之內：$\sqrt{2(2n)\pi} = 2\sqrt{n\pi}$，而不是 $\sqrt{2n\pi}$。

STEP 之外

(iii) 的答案是 $2^n/\binom{2n}{n}$，而估計式 $\binom{2n}{n} \approx 4^n/\sqrt{n\pi}$ 在概率論中隨處可見：它給出簡單隨機遊走（simple random walk）在 $2n$ 步後回到起點的機會，並且是證明一維或二維的這類遊走以概率 1 回到原點的關鍵。(i) 中的對稱性論證，就是可交換性（exchangeability）的概念：隨機抽取的次序不會改變它們的聯合分佈（joint distribution）。這兩個概念在 Grimmett 與 Welsh 的 *Probability: An Introduction*（《概率導論》）以及 Blitzstein 與 Hwang 的 *Introduction to Probability*（《概率導論》）中都有深入發展。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。