詳細解答

STEP I 2013，第 11 題

力學 • 摩擦力與平衡

STEP I 2013，第 11 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

step.maths.org/questions/13-s1-q11

關鍵思路

兩條繩在相對的兩側分別與水平成 $\frac{1}{2}\pi - \alpha$ 和 α 的角，因此兩繩互相垂直（perpendicular）。兩個互相垂直的力 $T\cos\beta$ 和 $T\sin\beta$ 合成一個大小為 T 的單一力，方向由第一個力轉過 β。把兩條繩換成一個與水平成 $\alpha+\beta$ 角、大小為 T 的拉力之後，兩部分都變成簡短的練習：第 (i) 部分是極限摩擦（limiting friction），第 (ii) 部分則要察覺物塊會被整個提離表面。

解答

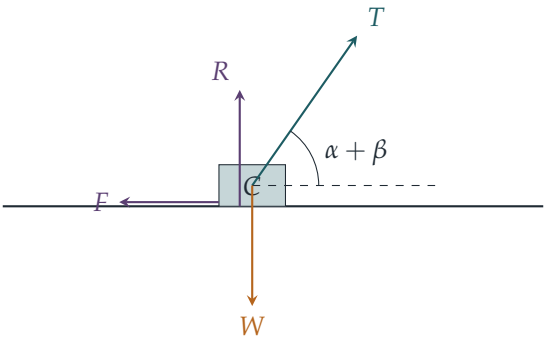
我們把 C 視為質點（particle），並把繩視為輕繩。取 x 軸為水平並指向 B，y 軸為豎直向上。

張力的合力

繩 BC 指向正 x 軸上方 α 角的方向，所以其單位向量（unit vector）為 $(\cos\alpha, \sin\alpha)$。繩 AC 與負 x 軸成 $\frac{1}{2}\pi - \alpha$ 角，所以它與正 x 軸成 $\pi - (\frac{1}{2}\pi - \alpha) = \frac{1}{2}\pi + \alpha$ 角，單位向量為 $(-\sin\alpha, \cos\alpha)$。兩者互相垂直。因此兩繩的總拉力為

$$\begin{aligned} T\cos\beta\,(\cos\alpha, \sin\alpha) + T\sin\beta\,(-\sin\alpha, \cos\alpha) &= T(\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta, \\ &\qquad \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta) \\ &= T(\cos(\alpha+\beta),\ \sin(\alpha+\beta)). \end{aligned}$$

所以兩繩的作用恰好等同一個大小為 T、在水平之上成 $\alpha+\beta$ 角、拉向 B 一側的單一力。由於 $0 < \alpha + \beta < \frac{1}{2}\pi$，兩個分量都是正數。



第 (i) 部分

設 R 為法向反作用力（normal reaction），F 為摩擦力；若物塊靜止，摩擦力沿水平方向背離 B。平衡時，

$$\begin{aligned} &\text{豎直方向：} \quad R + T\sin(\alpha+\beta) = W, \qquad \text{所以} R = W - T\sin(\alpha+\beta), \\ &\text{水平方向：} \quad F = T\cos(\alpha+\beta). \end{aligned}$$

條件 $W > T\sin(\alpha+\beta)$ 使 $R > 0$，所以物塊確實被壓在表面上，可以產生摩擦。只要所需的摩擦力不超過其極限值，即 $F \le \mu R$，物塊便保持靜止：

$$T\cos(\alpha+\beta) \le \mu(W - T\sin(\alpha+\beta)).$$

現在代入 $\mu = \tan\lambda = \sin\lambda/\cos\lambda$，並在兩邊乘以 $\cos\lambda$；由於 λ 是銳角，這個數是正數：

$$T\cos(\alpha+\beta)\cos\lambda \le W\sin\lambda - T\sin(\alpha+\beta)\sin\lambda.$$

移項並利用 $\cos(P-Q) = \cos P\cos Q + \sin P\sin Q$，得

$$W\sin\lambda \ge T(\cos(\alpha+\beta)\cos\lambda + \sin(\alpha+\beta)\sin\lambda) = T\cos(\alpha+\beta-\lambda),$$

這正是所求的條件。（每一步都可逆，所以事實上物塊保持靜止當且僅當此式成立。）

? **想一想** 為甚麼我們需要條件 $W > T\sin(\alpha+\beta)$ 呢？

若沒有這個條件，豎直方向的方程會給出 $R \le 0$。表面只能推、不能拉，所以 R 為負是不可能的：物塊會被提離表面（或僅僅剛好接觸），也就沒有摩擦力把它固定。這正是第 (ii) 部分的情況。

第 (ii) 部分

現在 $W = T\tan\phi$ 而 $\alpha+\beta = 2\phi$，所以 $0 < \phi < \frac{1}{4}\pi$。比較重量與兩繩向上的拉力：

$$\begin{aligned} T\sin(\alpha+\beta) - W &= T(2\sin\phi\cos\phi - \tan\phi) \\ &= T\tan\phi\,(2\cos^2\phi - 1) \\ &= T\tan\phi\cos 2\phi > 0, \end{aligned}$$

因為 $0 < \phi < \frac{1}{4}\pi$ 使 $\tan\phi$ 和 $\cos 2\phi$ 都是正數。所以兩繩向上的拉力大於重力向下的拉力。若物塊留在表面上，我們便需要 $R = W - T\sin(\alpha+\beta) < 0$，這是不可能的。因此物塊立即離開表面：$R = 0$，而既然沒有接觸，也就沒有摩擦力。

此時僅有的力是與水平成 2ϕ 角的拉力 T 和重量。合力（resultant force）為

$$(T\cos 2\phi,\ T\sin 2\phi - T\tan\phi) = (T\cos 2\phi,\ T\tan\phi\cos 2\phi) = \frac{T\cos 2\phi}{\cos\phi}(\cos\phi,\ \sin\phi),$$

其中豎直分量用了上面的計算。其大小 $T\cos 2\phi/\cos\phi$ 是正數，所以不為零。物塊由靜止開始，所以其初始加速度，從而它開始運動的方向，都沿着合力的方向。該方向為 $(\cos\phi, \sin\phi)$，即在水平之上成 ϕ 角（指向 B），正如所求。

驗算

- 取 $T = 10\,\mathrm{N}$、$\alpha = 20°$、$\beta = 40°$，於是 $\phi = 30°$，$W = 10\tan 30° \approx 5.77\,\mathrm{N}$。向上的拉力為 $10\sin 60° \approx 8.66\,\mathrm{N} > W$，合力為 $(10\cos 60°,\ 8.66 - 5.77) = (5,\ 2.89)$，其角度為 $\arctan(2.89/5) = 30° = \phi$。
- 在第 (i) 部分中，$\lambda = \frac{1}{2}\pi$（無限粗糙）給出 $W \geq T\sin(\alpha+\beta)$，這本來已經成立，所以物塊永不滑動；$\lambda \to 0$（光滑）給出 $0 \geq T\cos(\alpha+\beta)$，這不成立，所以光滑表面無法使物塊靜止。兩者都符合我們的預期。
- 第 (i) 部分的條件亦已用電腦，就 α, β, T, W, μ 的大量隨機取值，與直接檢驗 $F \leq \mu R$ 的結果互相核對。

常見錯誤

- 把每條繩分別分解，結果在代數中迷失，而沒有察覺兩繩互相垂直、應先把它們合成。
- 在第 (ii) 部分寫出 $R = W - T\sin(\alpha+\beta)$ 後繼續處理摩擦力，卻沒有察覺 R 會是負數。
- 忘記說明由靜止開始的質點最初沿合力方向運動。

STEP 之外

λ 即摩擦角（angle of friction），其意思是法向反作用力與極限摩擦力合成一個與法線成 λ 角的總反作用力；平衡可能出現，恰恰在總反作用力能落在這個「摩擦錐」（cone of friction）之內的時候。第 (i) 部分正是這個命題的變裝版本，而同一幅圖像亦能處理三維中的摩擦以及剛體問題。Kleppner 和 Kolenkow 的 *An Introduction to Mechanics*（《力學導論》）對摩擦、約束和接觸力有細緻的論述。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。