詳細解答

STEP I 2013，第 10 題

力學 • 恢復係數與摩擦力

> **STEP I 2013，第 10 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/13-s1-q10

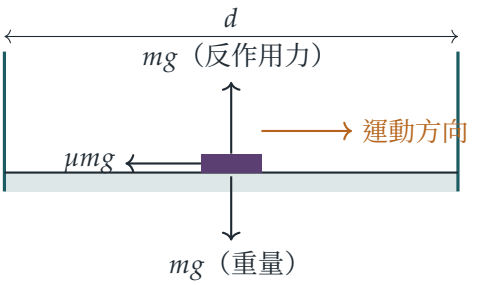
關鍵思路

在兩次碰撞之間，唯一的水平力是摩擦力（friction），所以冰球的減速度（deceleration）恆為 μg，而等加速度公式 $v^2 = u^2 + 2as$ 把冰球離開一道擋板時的速率與到達下一道擋板時的速率聯繫起來；然後牛頓（Newton）碰撞定律（law of restitution）把到達時的速率乘以 r。結果得到 v_i^2 的一條線性遞推關係（linear recurrence）。要解線性遞推關係 $w_{i+1} = aw_i + b$，只需平移到它的不動點（fixed point），之後它就只是一個等比數列（geometric sequence）。

解答

遞推關係

把冰球視為一個質點，沿垂直於擋板的直線運動。在兩次碰撞之間冰球在冰面上滑行時，法向反作用力（normal reaction）為 mg（沒有鉛垂方向的加速度）；由於冰球正在滑動，摩擦力取其極限值（limiting value）μmg，方向與運動方向相反。



由牛頓第二定律，減速度為常數 μg。因此，對於一趟長度為 d、起始速率為 v_i（即第 i 次碰撞剛結束時的速率）的橫越（traverse），冰球到達另一道擋板時的速率 u 滿足

$$u^2 = v_i^2 - 2\mu g d.$$

擋板是固定的，所以牛頓碰撞定律指出冰球離開時的速率是其接近速率的 r 倍：$v_{i+1} = ru$。兩邊平方，

$$v_{i+1}^2 = r^2u^2 = r^2v_i^2 - 2r^2\mu g d, \qquad \text{所以} \qquad v_{i+1}^2 - r^2v_i^2 = -2r^2\mu g d,$$

這正是所求的結果。若把起始速率記作 $v_0 = v$，同樣的論證也適用於第一趟橫越，所以這條遞推關係對所有 $i \geq 0$ 都成立。

橫越的次數

兩邊除以 $2\mu g d$，並令 $w_i = \dfrac{v_i^2}{2\mu g d}$，於是 $w_0 = k$ 及

$$w_{i+1} = r^2(w_i - 1).$$

「經過 n 趟橫越後在擋板旁靜止」的意思是：冰球在第 n 趟橫越結束時以零速率到達擋板。這時它離開的速率也是零，所以 $v_n = 0$，即 $w_n = 0$（而對於 $i < n$，$w_i > 0$）。

想一想 怎樣解 $w_{i+1} = r^2(w_i - 1)$？

先找常數解 $w_i = c$：需要 $c = r^2(c-1)$，所以 $c = -\dfrac{r^2}{1-r^2}$；由於 $r \neq 1$，這是有意義的。把遞推關係減去 $c = r^2(c-1)$，得

$$w_{i+1} - c = r^2(w_i - c),$$

所以 $w_i - c$ 是公比為 r^2 的等比數列：

$$w_i = c + r^{2i}(k - c).$$

令 $w_n = 0$，得 $r^{2n}(k-c) = -c$，即

$$r^{2n}\left(k + \frac{r^2}{1-r^2}\right) = \frac{r^2}{1-r^2} \quad \Longrightarrow \quad r^{2n-2}(k(1-r^2) + r^2) = 1.$$

兩邊乘以 r^{-2n}，整理成

$$r^{-2n} = 1 + k(r^{-2} - 1), \qquad \text{所以} \qquad \boxed{n = \frac{\ln\left(1 + k(r^{-2} - 1)\right)}{2\ln(1/r)}}$$

（當 $0 < r < 1$ 時，$\ln(1/r) > 0$；又因為 $k > 0$ 且 $r^{-2} > 1$，對數的自變量大於 1，所以 $n > 0$，理應如此。）

$r = \mathrm{e}^{-1}$ 的情況

此時 $r^{-2} = \mathrm{e}^2$ 而 $\ln(1/r) = 1$，所以公式變成

$$n = \tfrac{1}{2}\ln\left(1 + k(\mathrm{e}^2 - 1)\right),$$

這正是所求的結果。

$r = 1$ 的情況

遞推關係變成 $w_{i+1} = w_i - 1$：由於在擋板處沒有損失，每趟橫越恰好消耗 v^2 中的 $2\mu g d$。所以 $w_i = k - i$，而由 $w_n = 0$ 得

$$n = k = \frac{v^2}{2\mu g d}.$$

這其實就是能量守恆的考慮：初始動能 $\frac{1}{2}mv^2$ 在總距離 nd 上全部被摩擦力耗散，所以 $\frac{1}{2}mv^2 = \mu mg\, nd$。

驗算

- 取 $r = \mathrm{e}^{-1}$，從 $w_3 = 0$ 把遞推關係倒過來推：$w_2 = 1$，$w_1 = \mathrm{e}^2 + 1$，$w_0 = \mathrm{e}^4 + \mathrm{e}^2 + 1 \approx 62.99$。公式給出 $\frac{1}{2}\ln\left(1 + (\mathrm{e}^4 + \mathrm{e}^2 + 1)(\mathrm{e}^2 - 1)\right) = \frac{1}{2}\ln \mathrm{e}^6 = 3$，理應如此。
- 當 $r \to 1$ 時，$r^{-2} - 1 \approx 2(1 - r)$ 且 $\ln(1/r) \approx 1 - r$，所以一般公式趨向 $\dfrac{2k(1-r)}{2(1-r)} = k$，與 $r = 1$ 時的答案吻合。
- k 是無量綱的（v^2 和 gd 都是速率的平方），而 n 也必須是無量綱的。
- 對隨機選取的 μ、d、r 和 v 以數值方法逐步模擬運動，結果以很高的精確度證實了這條遞推關係。

常見錯誤

- 對 v_i^2 應用碰撞定律時用了因子 r 而不是 r^2：碰撞定律講的是速率，所以速率的平方要乘以 r^2，摩擦力那一項也一樣。
- 忘記 n 數的是橫越的趟數，而不是反彈速率非零的碰撞次數：條件是 $v_n = 0$，而 $v_0 = v$。

STEP 之外

遞推關係 $w_{i+1} = aw_i + b$ 是最簡單的線性差分方程（linear difference equation），而減去不動點這個技巧，正是你將來在線性微分方程中會遇到的「餘函數加特解」（complementary function plus particular solution）方法。這類彈跳問題（經典例子是皮球在地面上彈跳）也是能量耗散的好例子；在沒有摩擦力的情況下，它們還展示了在有限時間內發生無限多次事件的現象。Kleppner 和 Kolenkow 的 *An Introduction to Mechanics*（《力學導論》）對碰撞和摩擦力有更深入的論述。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。